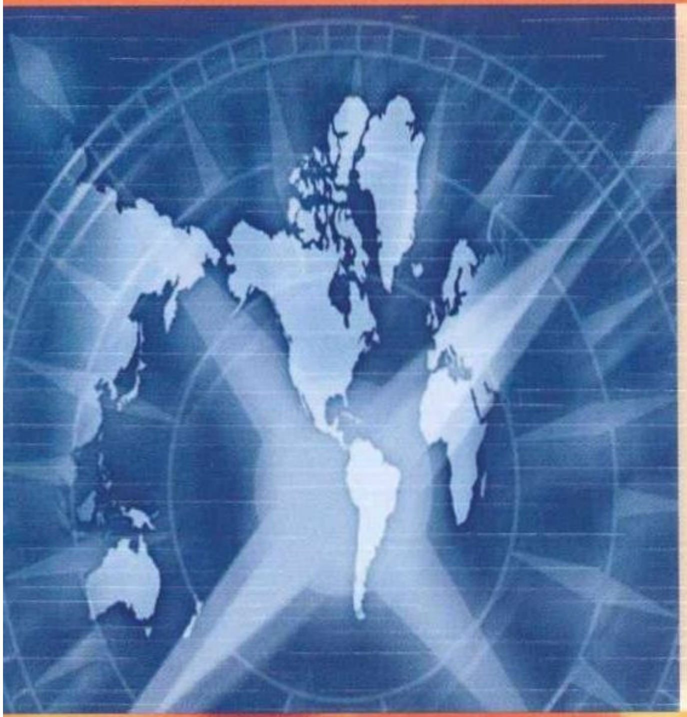
PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
HÀ NGỌC ĐỨC - THÁI VĂN CHUNG - VŨ ĐOÀN KẾT - LÊ THỊ LIÊN
TRẦN QUANG TÀI

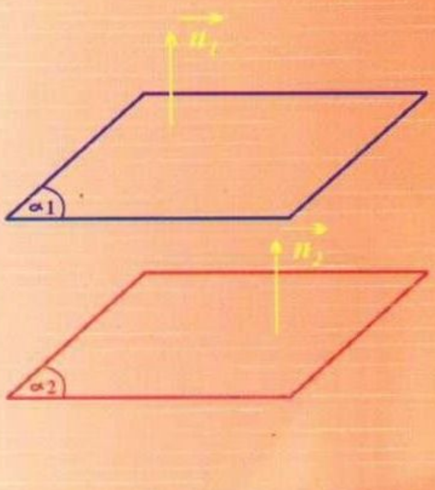
GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC 12

(CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO)

(Tái bản lần thứ hai)

- *Tóm tắt lý thuyết*
- *Bài tập căn bản*
- *Câu hỏi trắc nghiệm*
- *Đáp án*





NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS.TS. NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
HOÀNG NGỌC ĐỨC – THI VĂN CHUNG – VŨ ĐOÀN KẾT
LÊ THỊ LIÊN – TRẦN QUANG TÀI

Giải bài tập
HÌNH HỌC 12
(Chương trình nâng cao)

(Tái bản lần thứ hai)

- Tóm tắt lý thuyết
- Bài tập căn bản
- Câu hỏi trắc nghiệm
- Đáp án

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

*Cuốn sách "**GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 12 NÂNG CAO**" có nội dung ơng ứng với sách giáo khoa Hình học 12 nâng cao được áp dụng từ năm 08 – 2009*

Mỗi mục (§) của chương gồm bốn phần

I. *Tóm tắt lý thuyết*
II. *Bài tập căn bản*
III. *Câu hỏi trắc nghiệm*
IV. *Đáp án*

Phần I. Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của sách giáo oa mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

Phần II. Trình bày lời giải chi tiết của các bài tập có trong sách giáo oa, mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định hĩa, định lý, các tính chất đã học.

Phần III. Trình bày các câu hỏi trắc nghiệm nhằm giúp các em ôn yện lại kiến thức đã học.

Phần IV: Trình bày đáp án các câu hỏi trắc nghiệm nêu ở phần III.

Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau: Sau khi học lý uyết, các em hãy tự mình giải các bài tập có trong sách giáo khoa, nếu gặp ó khăn có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa ngay khi giải được bài tập của sách giáo khoa, các em cũng nên so sánh lời giải a mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc, đầy đủ ến thức và phương pháp giải toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian ải các câu hỏi trắc nghiệm ở phần III để củng cố kiến thức.

Hy vọng cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt hình c 12 nâng cao.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách eo cách chỉ "đọc" các lời giải có sẵn của các bài tập trong SGK.

Để việc sử dụng cuốn sách đạt hiệu quả cao, các em nên kết hợp sử ng các cuốn sách khác của cùng tác giả như: Các dạng bài tập và phương áp giải Hình học 12; kiến thức chuẩn và nâng cao Hình học 12. Toán bồi ưỡng trắc nghiệm và tự luận Hình học 12; Các chủ đề bám sát – nâng cao ình học 12; 1250 câu hỏi trắc nghiệm khách quan toán 12...

Chúc các em thành công.

Các tác giả

CHƯƠNG I. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

§1. Khái niệm về khối đa diện

. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khối đa diện

- Xét những hình H thỏa mãn hai điều kiện:

+ Hình H gồm một số hữu hạn đa giác phẳng.

+ Hình H phân chia không gian thành hai phần: phần bên trong và hần bên ngoài của hình đó.

- Hình H (như trên) cùng với các điểm nằm trong H được gọi là “khối đa iện” giới hạn bởi hình H.

2. Hình đa diện.

Trong chương trình, ta chỉ xét các khối đa diện giới hạn bởi hình H gồm ột số hữu hạn đa giác phẳng thỏa mãn hai điều kiện:

+) Hai đa giác bất kỳ hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh hung, hoặc có một cạnh chung.

+) Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Hình H gồm các đa giác đó được gọi là một hình đa diện hoặc đơn giản à đa diện.

3. Một khối đa diện được gọi là khối tứ diện, khối chóp, khối chóp cụt, hối lăng trụ, khối hộp, khối hộp chữ nhật, khối lập phương,... nếu nó được iới hạn bởi một hình tứ diện, hình chóp, hình chóp cụt, hình lăng trụ, inh hộp, hình hộp chữ nhật, hình lập phương,...

4. Một khối đa diện bất kì có thể phân chia thành các khối tứ diện.

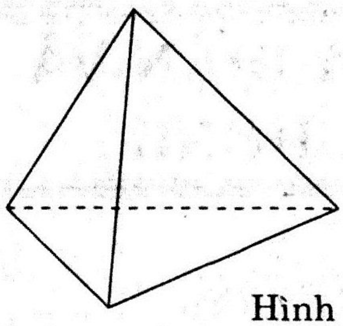
I. BÀI TẬP CĂN BẢN.

ài 1. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác thì số mặt phải là số chẵn. Hãy chỉ ra những khối đa diện như thế với số mặt bằng 4, 6, 8, 10.

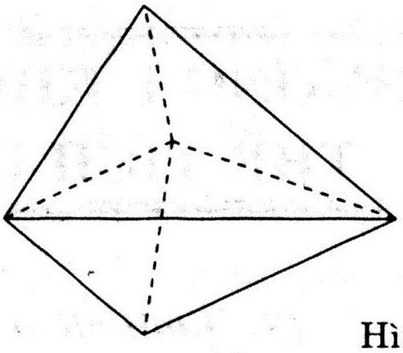
Giải

- Giả sử khối đa diện đã cho có M mặt và C cạnh.

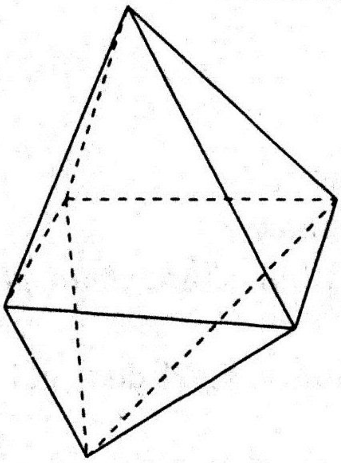
Vì mỗi mặt có 3 cạnh nên M mặt có 3M cạnh, nhưng mỗi cạnh lại hung cho 2 mặt nên có 2C = 3M, suy ra M chẵn. Vậy nếu khối đa diện có ác mặt là các tam giác thì số mặt phải là số chẵn.



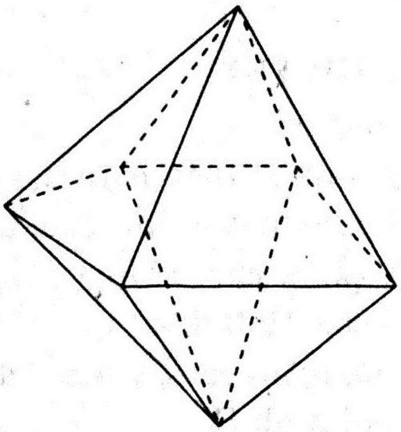
Hình a)



Hình b)



Hình c)



Hình d)

- Hình a) Khối tứ diện có 4 mặt là tam giác.
- Hình b) Khối 6 mặt là tam giác.
- Hình c) Khối 8 mặt là tam giác.
- Hình d) Khối 10 mặt là tam giác.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu khối đa diện mà mỗi đỉnh là đỉnh chung củ cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.

Giải

Gọi Đ, C lần lượt là số đỉnh, số cạnh của đa diện.

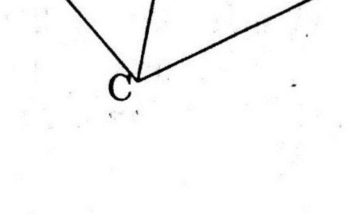
Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung của 3 cạnh nên Đ đỉnh có 3 Đ cạnh, như mỗi cạnh là cạnh chung của 2 đỉnh.

Vậy 2C = 3Đ. Từ đó suy ra Đ là số chẵn.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác và m đỉnh là đỉnh chung của 3 cạnh thì đó là khối tứ diện.

Giải

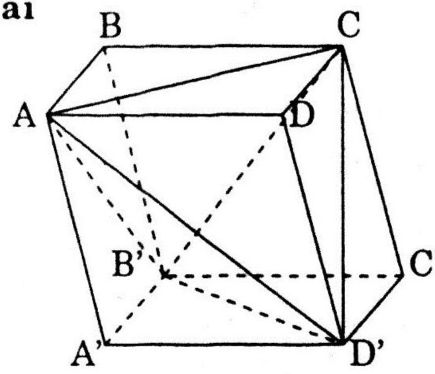
Gọi A là một đỉnh của khối đa diện. A là đỉnh chung của 3 cạnh AB, AC, AD. Mặt chứa cạnh AB, AC phải là ΔABC, tương tự ΔACD, ΔADB cũng là các mặt của đa diện. Vậy xuất phát từ đỉnh D của đa diện có các cạnh DC, DB nên mặt chứa cạnh DB và DC phải là ΔBCD đây là mặt thứ tư của đa diện. Từ đó suy ra kết quả của bài toán.



Bài 4. Hãy phân chia một khối hộp thành năm khối tứ diện.

Giải

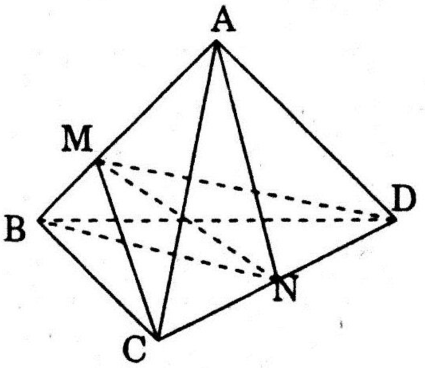
Khối hộp ABCD.A'B'C'D' được chia thành 5 khối tứ diện C.B'C'D; B.CB'A; A.A'B'D'; D.ACD'; B'.ACD' bởi các mặt phẳng (CB'D'), (ACB'), (AB'D'), ACD')



Bài 5. Hãy phân chia một khối tứ diện thành bốn khối tứ diện bởi hai mặt phẳng.

Giải

Gọi M, N là hai điểm trên cạnh AB, CD (khác hai đầu mút). Khi đó hai mặt phẳng (ABN) và (CMD) chia khối tứ diện ABCD thành bốn khối tứ diện : CBMN; DBMN; CAMN; DAMN



III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

1. Các hình nào sau đây không phải là đa diện:

(A) Hình lập phương;

(B) Hình tứ diện và hình lập phương rời nhau;

(C) Hình tứ diện và hình lập phương có một đỉnh chung;

(D) Hình tứ diện và hình lập phương có một cạnh chung.

2. Cho khối chóp n-giác. Mệnh đề nào sai?

(A) Số cạnh của khối chóp là 2n;

(B) Số đỉnh của khối chóp là $2n + 1$;

(C) Số mặt của khối chóp là $n + 1$;

(D) Số mặt của khối chóp bằng số đỉnh của nó.

3. Cho lăng trụ n giác. Mệnh đề nào sai? Lăng trụ có:

(A) Số cạnh là 3n; **(B)** Số đỉnh là 2n;

(C) Số mặt bằng số đỉnh; **(D)** Số mặt là $n + 2$.

IV. ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3
Đáp án	**(D)**	**(B)**	**(C)**

§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các định nghĩa:

a) Phép đối xứng qua mặt phẳng:

Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, và biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'

b) Mặt phẳng đối xứng của một hình:

(P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của hình H nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình H thành chính nó.

Đặc biệt, nếu (P) biến tập các đỉnh của hình H thành chính nó thì (P) là mặt phẳng đối xứng của hình H.

c) Phép dời hình là một phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

d) Hai hình H và H' được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Đặc biệt, hai hình đa diện H và H' bằng nhau nếu có một phép dời hình biến tập hợp các đỉnh của hình H thành tập hợp các đỉnh của hình H'. ta cũng nói, các khối đa diện xác định bởi H và H' bằng nhau.

2. Các tính chất:

a) Phép đối xứng qua mặt phẳng là một phép dời hình

b) Hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau.

Suy ra: - Hai tứ diện đều có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.
- Hai hình lập phương có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 6. Gọi Đ là phép đối xứng qua mp (P) và a là một đường thẳng nào đó. Giả sử Đ biến a thành đường thẳng a'. Trong trường hợp nào thì :

a) a trùng với a' **b)** a song song với a'

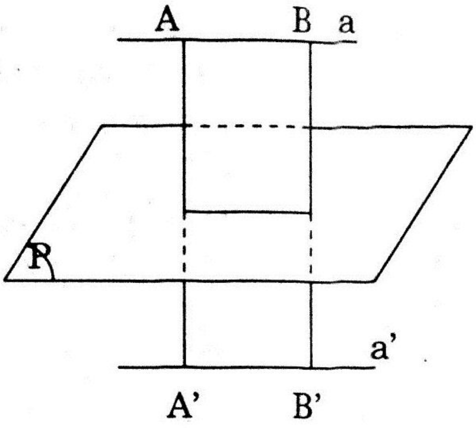
c) a cắt a' **d)** a và a' chéo nhau.

Giải

Giữa a và (P) xảy ra các khả năng sau:

+) a $\subset$ (P). Khi đó, lấy điểm A bất kì trên a thì A $\in$ (P) nên Đ biến A thành A' $\equiv$ A. Vậy Đ biến a thành a' $\equiv$ a

+) a // (P). Lấy 2 điểm A, B phân biệt trên a giả sử Đ biến A thành A', B thành B'. Ta thấy tứ giác ABB'A' là hình chữ nhật nếu A'B' // AB hay a' // a



Hình a)

+) a ⊥ (P). Lấy A bất kì trên a. Nếu Đ biến A thành A' thì AA' ⊥ (P) mà a ⊥ (P), A ∈ a ⇒ A' ∈ a ⇒ a' ≡ a

+) a cắt (P) tại I nhưng không vuông góc gới (P). Khi đó, Đ biến I thành chính nó (vì I ∈ (P)) và biến A ∈ a (với A không trùng I) thành A' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của AA'. Vậy Đ biến AI thành A'I

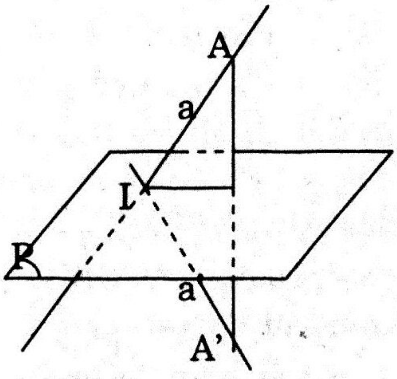
Do a không vuông góc với (P) nên dễ thấy A, I, A' không thẳng hàng hay AI, A'I cắt nhau tại I tức a, a' cắt nhau.

Vậy: **a)** a trùng với a' nếu a ⊂ (P) hoặc a ⊥ (P),

b) a // a' nếu a // (P),

c) a cắt a' nếu a cắt (P) nhưng a không vuông góc với (P),

d) a, a' chéo nhau không xảy ra.



Hình b)

Bài 7. Tìm các mặt phẳng đối xứng của các hình sau đây:

a) Hình chóp tứ giác đều;

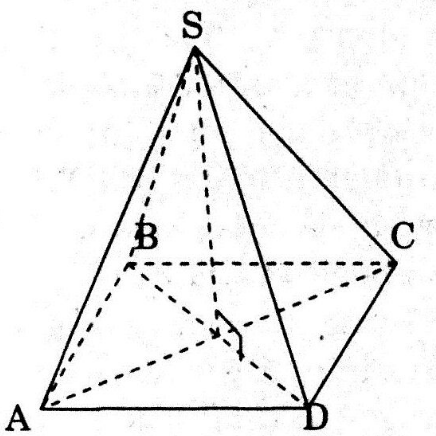
b) Hình chóp cụt tam giác đều;

c) Hình hộp chữ nhật mà không có mặt nào là hình vuông.

Giải

a) Xét hình chóp tứ giác đều S.ABCD

- Dễ thấy (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD nên phép đối xứng qua (SAC) biến các đỉnh S, A, B, C, D lần lượt thành các đỉnh S, A, D, C, B hay biến hình chóp S.ABCD thành chính nó. Vậy (SAC) là một mặt phẳng đối xứng của hình chóp S.ABCD



Tương tự (SBD) cũng là một mp đối xứng của hình chóp S.ABCD

- Lại có, mặt phẳng trung trực của cạnh AB đồng thời là mặt phẳr trung trực của cạnh CD và chứa S nên đó là một mặt phẳng đối xứng c hình chóp S.ABCD. Tương tự mặt phẳng trung trực của cạnh AD cũng một mặt phẳng đối xứng của hình chóp S.ABCD

- Kết luận: Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có 4 mặt phẳng đối xứng l (SAC), (SBD), mặt phẳng trung trực của cạnh AB, AD

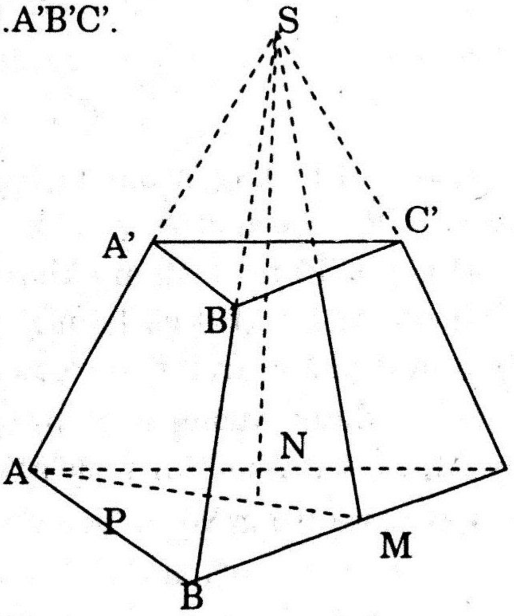
b) Xét hình chóp cụt tam giác đều ABC.A'B'C'.

- Gọi S là điểm đồng quy của AA', BB' CC', M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Ta có (SAM) là mặt phẳng trung trực của cạnh BC, cũng là mặt phẳng trung trực của cạnh B'C'

Mặt khác A' ∈ SA ⇒ A' ∈ mp(SAM)

Vậy phép đối xứng qua mp(SAM) biến các đỉnh A, B, C, A', B', C' lần lượt thành A, C, B, A', C', B' do đó biến hình chóp cụt tam giác đều ABC.A'B'C' thành chính nó hay (SAM) là một mp đối xứng của hình chóp cụt tam giác đều ABC.A'B'C'

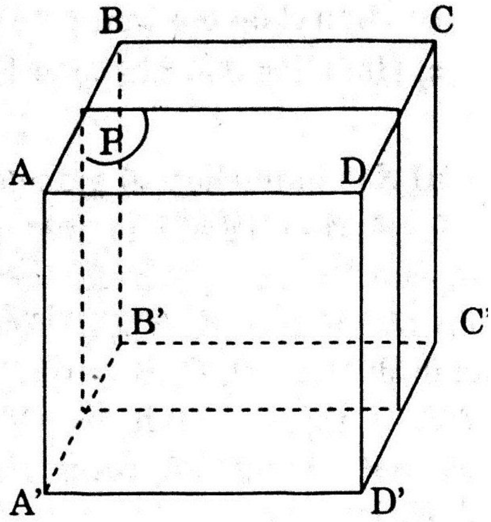


- Tương tự, (SBN) và (SCP) cũng là các mặt phẳng đối xứng của hìn chóp cụt đã cho.

- Kết luận: Hình chóp cụt tam giác đều ABC.A'B'C' có ba mặt phẳng đ xứng là (SAM), (SBN), (SCP)

c) Xét hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' mà không có mặt nào là hìn vuông.

- Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của cạnh AB thì (P) cũng là mặt phẳng trung trực của các cạnh CD, D'C', A'B' nếu phép đối xứng qua (P) biến A, B, C, D, A', B', C', D' lần lượt thành B, A, D, C, B', A', D', C' hay phép đối xứng qua (P) biến hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' thành chính nó. Vậy (P) là một mặt phẳng đối xứng của hình hộp chữ nhật.



Tương tự mặt phẳng trung trực của các cạnh AA', AD cũng là các mặt phẳng đối xứng của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'

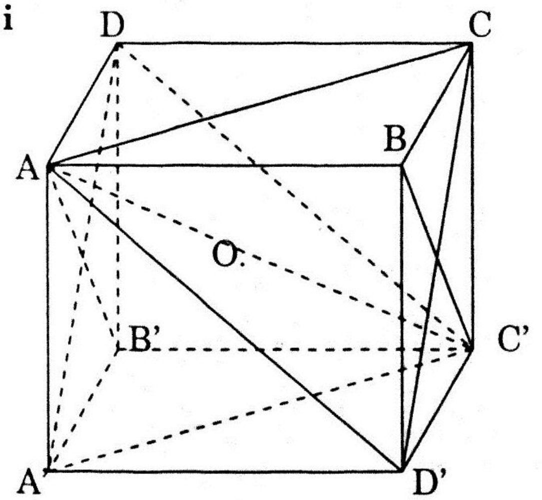
Kết luận: Hình hộp chữ nhật mà không có mặt nào là hình vuông có mặt phẳng đối xứng là 3 mặt phẳng trung trực của 3 cạnh cùng xuất phá tại một đỉnh.

Bài 8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) Các hình chóp A.A'B'C'D' và hình chóp C'ABCD bằng nhau.

b) Hình lăng trụ ABC.A'B'C' và AA'D'.BB'C' bằng nhau.

Giải



a) *Cách 1.* Do ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương nên phép đối xứng qua mặt phẳng trung trực của AA' biến hình chóp A.A'B'C'D' thành hình chóp A'.ABCD và phép đối xứng qua (BB'D'D) biến hình chóp A'.ABCD thành hình chóp C'.ABCD. Vậy các hình chóp A.A'B'C'D' và C'.ABCD bằng nhau (vì phép đối xứng qua mặt phẳng là phép dời hình)

Cách 2. Cho điểm O cố định. Phép biến hình biến mỗi điểm M tron không gian thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ gọi là phép đối xứng tâm O. Dễ chứng minh được phép đối xứng tâm là một phép dời hình.

- Gọi O là trung điểm của AC' thì O cũng là trung điểm của các đườn chéo BD', A'C, B'D nên phép đối xứng tâm O biến A, A', B', C', D' lần lượ thành C', C, D, A, B. Vậy các hình chóp A.A'B'C'D' và C'.ABCD bằng nha (do phép đối xứng tâm là phép dời hình)

b) Xét phép đối xứng qua mặt phẳng (ADC'B')

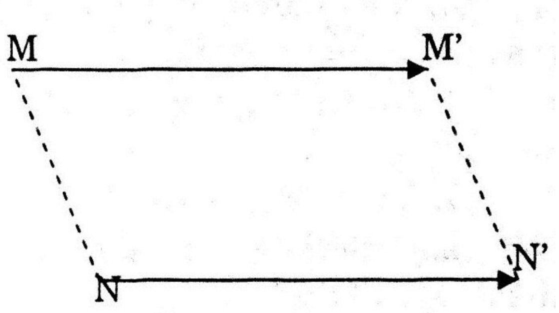
ta có: $A \mapsto A', B \mapsto A', C \mapsto D', A' \mapsto B, B' \mapsto B', C' \mapsto C'$

Do đó lăng trụ ABC.A'B'C' → lăng trụ AA'D'.BB'C'

Vì vậy hai lăng trụ ABC.A'B'C' và AA'D'.BB'C'

Bài 9. Chứng minh rằng các phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm l những phép dời hình.

Giải



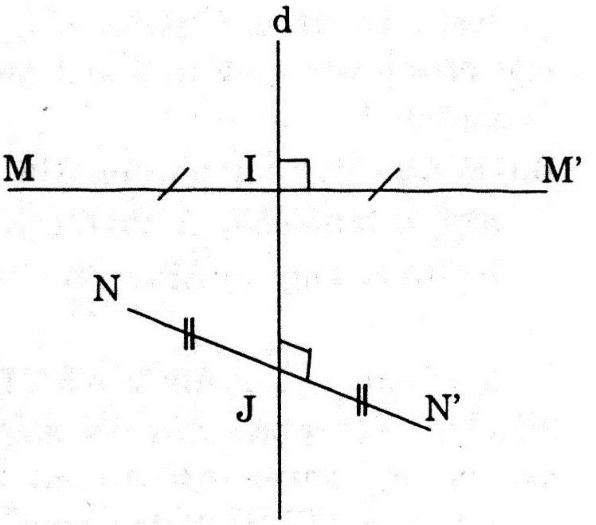
* Phép tịnh tiến là phép dời hình.

Nếu phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến hai điểm M, N lần lượt thành M', N' thì $\overline{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v}$

Ta có $\overline{M'N'} = \overline{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$

$= -\vec{v} + \overrightarrow{MN} + \vec{v} = \overrightarrow{MN}$

Suy ra M'N' = MN hay phép tịnh tiến là một phép dời hình.



* Phép đối xứng trục là phép dời hình.

Cách 1. Gọi $Đ_d$ là phép đối xứng qua đường thẳng d.

Giả sử $Đ_d$ biến M thành M', N thành N'

Gọi I là trung điểm MM', J là trung điểm của NN'

Suy ra I, J ∈ d

Ta có $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JN})^2 = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{JN})^2 + \overrightarrow{IJ}^2$ (1)

(vì $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{MI}; \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{JN}$)

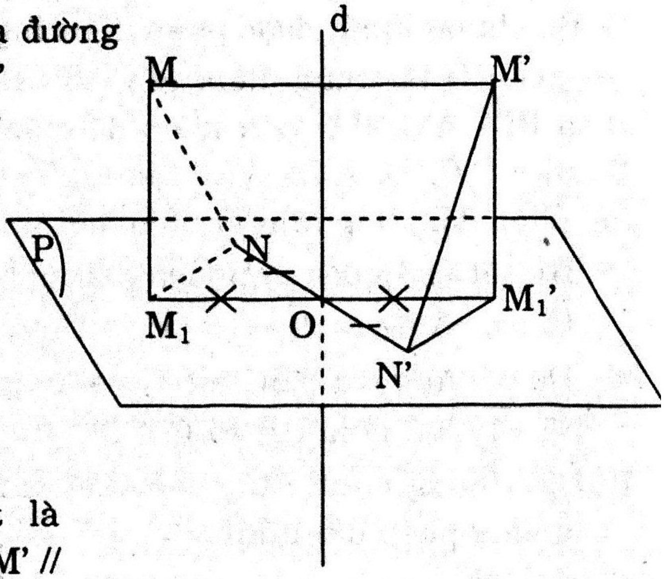
Tương tự $M'N'^2 = \overline{M,N'}^2 = (\overrightarrow{M'I}+\overrightarrow{JN'})^2 + \overrightarrow{IJ}^2$ (2)

Chú ý rằng : $\overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{M'I}$; $\overrightarrow{JN} = -\overrightarrow{JN'}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $MN^2 = M'N'^2 \Rightarrow MN = M'N'$

⇒ Vậy phép đối xứng trục là phép dời hình.

Cách 2. Giả sử phép đối xứng qua đường thẳng d biến M thành M', N thành N'

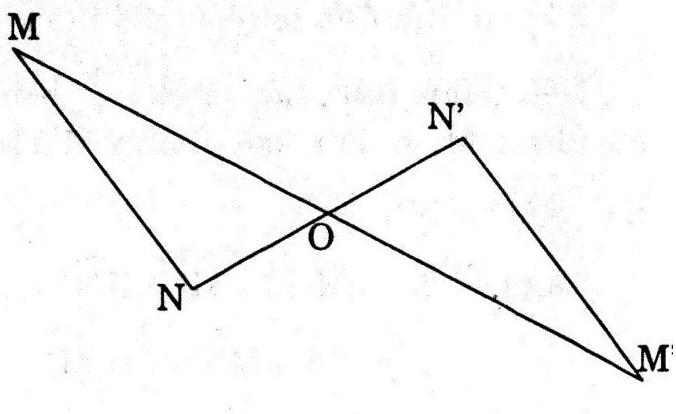


Gọi (P) là mặt phẳng chứa NN' và (P) // MM'

M_1, M_1' lần lượt là hình chiếu của M, M' trên (P) ; O = d ∩ (P). Ta có d ⊥ (P) nên O đồng thời là trung điểm của M_1M_1' và NN'. Vậy phép đối xứng tâm O biến M_1 thành M_1', N thành N' nên $M_1N = M_1'N'$

Mặt khác M_1N, $M_1'N'$ lần lượt là hình chiếu của MN, M'N' trên (P), MM' // (P) nên MN = M'N'

Vậy phép đối xứng qua đường thẳng là phép dời hình.



* Phép đối xứng tâm là phép dời hình.

Nếu phép đối xứng tâm O biến hai điểm M, N lần lượt thành M', N' thì

$$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{0} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{ON}+\overrightarrow{ON'}=\overrightarrow{0}$$

Nên:

$$(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{ON'})-(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'})=\overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})=-(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM'})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{M'N'}.$$

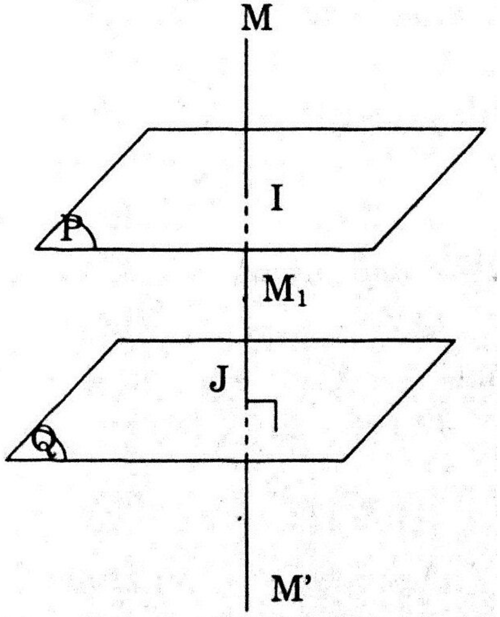
Suy ra: MN = M’N’. Vậy phép đối xứng tâm là phép dời hình.

Bài 10. Chứng minh rằng:

a) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là một phép tịnh tiến.

b) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau là một phép đối xứng qua đường thẳng.

Giải



a) Lấy điểm M bất kì trong không gian

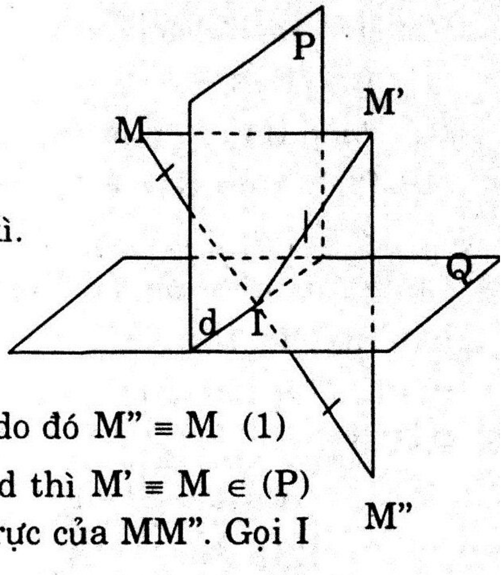
Giả sử phép đối xứng qua (P) biến M thành M_1 và phép đối xứng qua (Q) biến M_1 thành M’.Gọi I, J là trung điểm của MM_1, M_1M' (suy ra I ∈ (P), J ∈ (Q) IJ ⊥ (P))

Ta có:

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{M_1M'}=2.\overrightarrow{IM_1}+2\overrightarrow{M_1J}=2\overrightarrow{IJ}$$

Chú ý rằng $\overrightarrow{IJ}$ có phương vuông góc với (P) độ dài bằng khoảng cách giữa (P) và (Q) hướng từ (P) đến (Q))

Nếu đặt $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{v}$ thì $\overrightarrow{v}$ có phương, hướng và độ dài không đổi. Khi đó phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{v}$ biến M thành M’.



Vậy hợp thành của 2 phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song là một phép tịnh tiến.

b) Gọi d = (P) ∩ (Q) . M là một điểm bất kì.

Giả sử phép đối xứng qua (P) biến M thành M’ và phép đối xứng qua (Q) biến M’ thành M”

- Trường hợp 1. Nếu M ∈ d thì M’ ≡ M và do đó M” ≡ M (1)

- Trường hợp 2. Nếu M ∈ (P) nhưng $M \,\overline{\in}\, d$ thì M’ ≡ M ∈ (P) do đó MM” ⊂ (P) và (Q) là mặt phẳng trung trực của MM”. Gọi I là trung điểm của MM”

$\Rightarrow I \in (P)$ và $I \in (Q)$

$\Rightarrow I \in d$ mà $d \perp MM''$ (do $d \subset (Q)$). Vậy d là đường trung trực của MM''.

Trường hợp $M \in (Q)$ nhưng $M \in d$ tương tự.

- Trường hợp 3. Nếu $M \in (P)$ và $M \in (Q)$ thì M, M', M'' phân biệt. Vì l $= (P) \cap (Q)$ mà (P), (Q) lần lượt là mặt phẳng trung trực của MM', $M'M''$ iên $d \perp (MM'M'') \Rightarrow d \perp MM''$ (*)

Mặt khác, gọi I là trung điểm của MM'', do $\Delta MM'M''$ vuông tại M' nên M $= IM' = IM'' \Rightarrow$ I đồng thời thuộc mặt phẳng trung trực của MM' và $M'M''$ hay $I \in (P)$ và $I \in (Q) \Rightarrow I \in d$ (**)

Từ (*) và (**) ta có d là đường trung trực của đoạn MM'' (3)

Kết luận: Từ (1), (2) và (3) Ta thấy: Nếu thực hiện liên tiếp hai phép lối xứng qua hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) thì mỗi điểm $M \in d$ (với d $= (P) \cap (Q)$) biến thành chính nó, mỗi điểm $M \notin d$ biến thành M'' sao cho d à trung trực của MM''. Đó chính là phép đối xứng qua đường thẳng d.

II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

1. Khối lập phương có số mặt phẳng đối xứng là:

(A) 3 ; **(B)** 9 ; **(C)** 5 ; **(D)** 6.

2. Số mặt phẳng đối xứng của hình chóp cụt tứ giác đều là:

(A) 2 ; **(B)** 3 ; **(C)** 4 ; **(D)** 5.

3. Cho d // d'. Có bao nhiêu phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d'?

(A) Không có; **(B)** Có một ; **(C)** Có hai; **(D)** Có vô số.

4. Cho $\vec{v}$ phép biến hình biến mỗi điểm M trong không gian thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ gọi là phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai đường thẳng song song là một phép tịnh tiến;

(B) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mp song song là một phép tịnh tiến;

(C) Phép tịnh tiến là một phép dời hình;

(D) Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

5. Trong các hình sau đây, hình nào có 6 mặt phẳng đối xứng?

(A) Tứ diện đều; **(B)** Lăng trụ tam giác đều;

(C) Khối 8 mặt đều; **(D)** Hình chóp ngũ giác đều.

V. ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	**(B)**	**(C)**	**(B)**	**(D)**	**(A)**

§3. Phép vị tự, các khối đa diện đều và sự đồng dạng của các khối đa diện đều

. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phép vị tự trong không gian

a) Định nghĩa: Cho số k không đổi (k ≠ 0) và một điểm O cố định phép biến hình biến mỗi điểm M trong không gian thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k.

Kí hiệu: V_O^K

b) Tính chất :

+) Phép vị tự tỉ số k biến M, N lần lượt thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$ và do đó $M'N' = |k|.MN$

+) Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa chúng.

2. Hai hình đồng dạng.

Hình H được gọi là đồng dạng với hình H' nếu có một phép vị tự biến H thành H_1 mà hình H_1 bằng hình H'

3. Khối đa diện đều và sự đồng dạng của các khối đa diện đều.

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có hai tính chất:

a) Các mặt là những đa giác đều và có cùng số cạnh.

b) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của cùng một số cạnh.

- Khối đa diện đều mà mỗi mặt là đa giác đều n cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của P cạnh được gọi là khối đa diện đều loại {n; p}

- Hai khối đa diện đều cùng loại thì đồng dạng với nhau.

Lưu ý: Chỉ có 5 khối đa diện đều, đó là các loại:

{3; 3}, {3; 4}, {3; 5}, {4; 3}, {5; 3}

I. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 11. Chứng minh rằng phép vị tự biến một đường thẳng a thành đường thẳng a' song song hoặc trùng với a, biến mỗi mặt phẳng (α) thành một mặt phẳng (α') song song hoặc trùng với (α)

Giải

- Do phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng nên nó biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Hơn nữa a' song song hoặc trùng với a.

Thật vậy, trên a lấy hai điểm A, B; Giả sử $V_{(0,\ k)}$ biến A thành A' biến B thành B'. Ta có: $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\,\overrightarrow{AB}$

- Trường hợp 1: $k = 1$ hoặc $O \in a$ thì $A'B' \equiv AB$ hay $a' \equiv a$
- Trường hợp 2: $k \neq 1$ và $O \in a$ thì $A'B' \,//\, AB$ hay $a' \,//\, a$

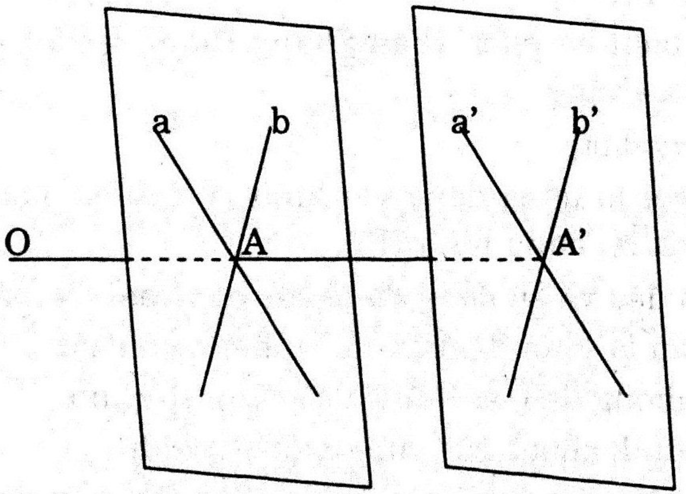
Phép vị tự $V_{(0,\,k)}$ biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó nên biến hai đường thẳng cắt nhau thành hai đường thẳng cắt nhau.Vậy nó biến mp(α) thành mặt phẳng (α') Hơn nữa mp(α') song song hoặc trùng với mp(α) Thật vậy:

- Nếu $O \in (\alpha)$ thì $V_{(0,\,k)}$ biến $A \in (\alpha)$ thành A' sao cho $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$,

$\Rightarrow A' \in OA$ hay $A' \in$ mp(α) suy ra mp(α') $\equiv$ mp(α)

- Nếu $k = 1$ thì $V_{(0,\,k)}$ biến $A \in$ mp(α) thành $A' \equiv A$ nên mp(α') $\equiv$ mp(α)

- Nếu $O \overline{\in}$ mp(α) và $k \neq 1$. Trên mp(α) lấy hai đường thẳng a, b cắt a', b' cắt nhau tại A' ($V_{(0,\,k)}$ biến A thành A') và a' // a, b' // b. Nên mp(α) chứa a', b' song song với mp(α) (chứa a, b)

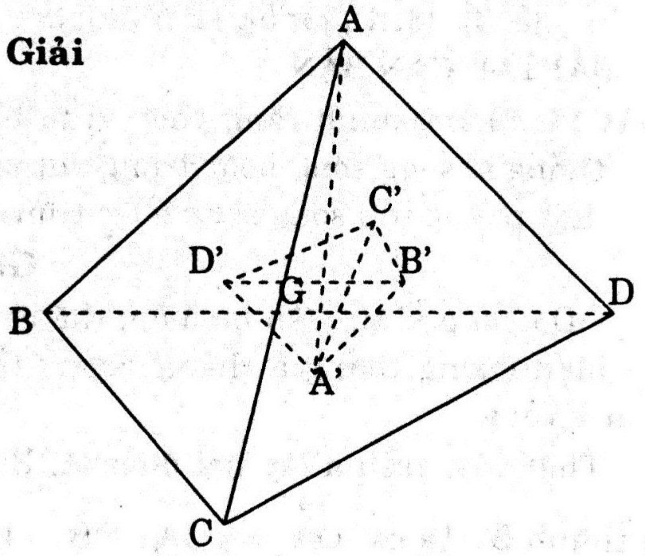


Bài 12. Cho một khối tứ diện đều, hãy chứng minh rằng :

a) Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều.

b) Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

Giải



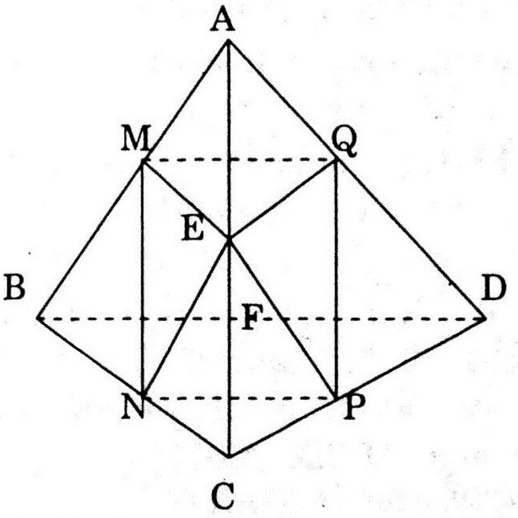
a) Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD. A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D. Theo tính chất của trọng tâm tứ diện, ta có:

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} \quad ; \quad \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GB}$$

$$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GC} \quad ; \quad \overrightarrow{GD'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GD}$$

Nên $V_{(G,-\frac{1}{3})}$ biến A, B, C, D lần lượt thành A', B', C', D' hay $V_{(G,-\frac{1}{3})}$ biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D' nên A'B'C'D' là tứ diện đều.

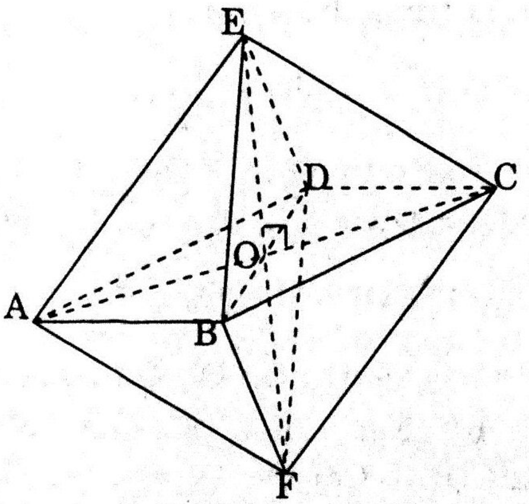
b) Xét tứ diện đều ABCD. Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CD, DA, AC, BD



Dễ thấy E cùng với 4 điểm M, N, P, Q là các đỉnh của khối chóp tứ giác E.MNPQ có 4 mặt bên là các tam giác đều. Ta cũng có F.MNPQ là khối chóp tứ giác với các mặt bên là những tam giác đều.

Vậy M, N, P, Q, E, F là các đỉnh của một khối 8 mặt đều.

Bài 13. Hai đỉnh của một khối tám mặt đều cho trước gọi là các đỉnh đối diện nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là một đường chéo của khối tám mặt đều. Chứng minh rằng trong khối tám mặt đều:



a) Ba đường chéo nhau cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) Ba đường chéo đối một vuông góc.

c) Ba đường chéo bằng nhau.

Giải

Xét khối 8 mặt đều ABCDEF. Vì A, B, C, D cách đều E và F nên A, B, C, D cùng thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn EF và do đó ABCD là hình thoi (vì AB = BC = CD = DA)

a) Tứ giác ABCD là hình thoi nên AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Tương tự, AC và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Vậy AC, BD, EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) Tứ giác ABCD là hình thoi nên ta cũng có AC ⊥ BD, tương tự AC ⊥ EF, BD ⊥ EF. Vậy AC, BD, EF đôi một vuông góc.

c) *Cách 1.* Dễ thấy ΔABD = ΔEBD (c-c-c) nên các trung tuyến tương ứng bằng nhau tức là AO = EO ⇒ AC = EF, ~~tương tự AC = BD~~

Vậy AC = BD = EF (đpcm)

Cách 2. Vì $EO \perp (ABCD)$ nên OA, OB là hình chiếu của EA, EB trên (ABCD) mà $EA = EB \Rightarrow OA = OB \Rightarrow AC = BD$. Tương tự, $AC = EF$

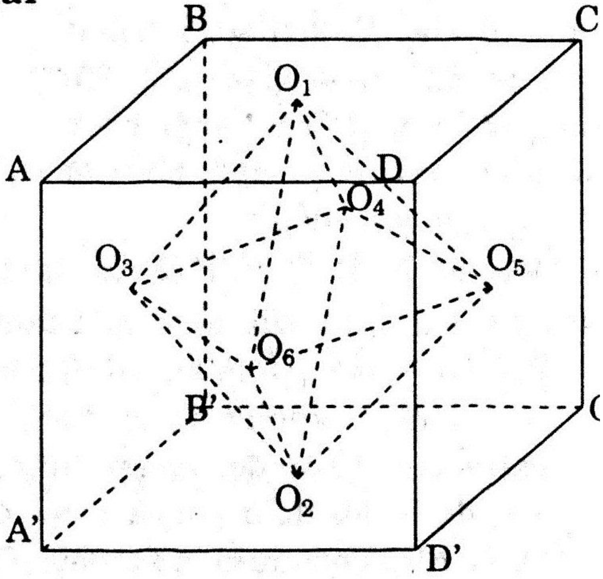
Vậy $AC = BD = EF$

Bài 14. Chứng minh rằng:

a) Tâm các mặt của khối lập phương cho trước là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

b) Tâm các mặt của một khối tám mặt đều cho trước là các đỉnh của một khối lập phương.

Giải



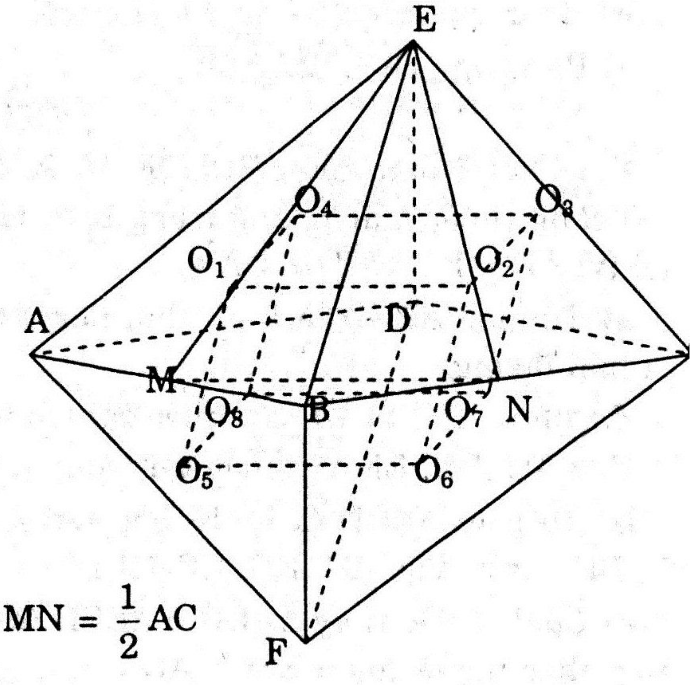
a) Xét khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 lần lượt là tâm của các mặt ABCD, A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'

Ta có: O_1 là trung điểm của BD, O_3 là trung điểm của A'B nên :

$$O_1O_3 = \frac{1}{2}A'D = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tương tự: $O_1O_4 = O_1O_5 = O_1O_6 = O_3O_4 = O_4O_5 = O_5O_6 = O_6O_3 = O_2O_3 = O_2O_4 = O_2O_5 = O_2O_6 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 là các đỉnh của một khối 8 mặt đều.



b) Xét khối 8 mặt đều ABCDEF. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8 lần lượt là trọng tâm của các mặt EAB, EBC, ECD, EDA, FAB, FBC, FCD, FDA

- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC

Ta có O_1, O_2 là trọng tâm ΔEAB, EBC nên

$$\frac{EO_1}{EM} = \frac{EO_2}{EN} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow O_1O_2 \,//\, MN$

Và $\dfrac{O_1O_2}{MN} = \dfrac{2}{3}$ mà $MN \,//\, AC$ và $MN = \dfrac{1}{2}AC$

$\Rightarrow O_1O_2 \,//\, AC$ và $O_1O_2 = \dfrac{1}{3}AC$ (*)

Tương tự O_4O_3 // AC và $O_4O_3 = \frac{1}{3}AC$

$\Rightarrow O_1O_2$ // O_3O_4 và $O_1O_2 = O_3O_4$

$\Rightarrow$ Tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành.

Lại có: O_1O_4 // BD, $O_1O_4 = \frac{1}{3}BD$ kết hợp (*) và lưu ý rằng

$AC = BD$, $AC \perp BD \Rightarrow O_1O_2 = O_1O_4$; $O_1O_2 \perp O_1O_4$ nên tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

- Hoàn toàn tương tự ta có: $O_1O_2O_6O_5$; $O_2O_3O_7O_6$; $O_3O_4O_8O_7$; $O_4O_1O_5O_8$; $O_5O_6O_7O_8$ là các hình vuông.

Vậy O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8 là các đỉnh của một khối lập phương.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

1. Phép vị tự tâm O biến M thành N sao cho $OM = \frac{1}{3}ON$. Đó là phép vị tự với tỉ số là:

(A) $\frac{1}{3}$; **(B)** $\pm\frac{1}{3}$; **(C)** ±3 ; **(D)** 3.

2. Cho hai đường thẳng song song d và d' ; điểm O cố định không nằm trên d, d'. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến d thành d' hoặc ngược lại?

(A) Có 1; **(B)** Có 2; **(C)** Không có; **(D)** Có 2 hoặc không có.

3. Đáp án nào đúng? Khối 8 mặt đều có:

(A) 16 cạnh và 8 đỉnh; **(B)** 16 cạnh và 6 đỉnh;

(C) 12 cạnh và 8 đỉnh; **(D)** 12 cạnh và 6 đỉnh.

4. Đáp án nào đúng? Khối 12 mặt đều có:

(A) 18 cạnh và 8 đỉnh ; **(B)** 30 cạnh và 20 đỉnh;

(C) 30 cạnh và 24 đỉnh; **(D)** 24 cạnh và 20 đỉnh;

5. Khối 8 mặt đều có số mặt phẳng đối xứng là:

(A) 7; **(B)** 8; **(C)** 9 ; **(D)** 15.

6. Khối 12 mặt đều thuộc loại:

(A) {5; 3} ; **(B)** {3; 5} ; **(C)** {3 ; 4} ; **(D)** {4; 3}

IV. ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	**(C)**	**(D)**	**(D)**	**(B)**	**(C)**	**(A)**

§4. Thể tích khối đa diện

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Thể tích có các tính chất sau:

- Hai khối đa diện bằng nhau có thể tích bằng nhau.

- Nếu một khối đa diện được phân chia thành nhiều khối đa diện nhỏ thì thể tích của nó bằng tổng thể tích của các khối đa diện nhỏ đó.

- Khối lập phương có cạnh bằng 1 thì có thể tích bằng 1.

2. Thể tích các khối đa diện thường gặp:

a. Thể tích khối hộp chữ nhật

$V = abc$,(với a, b, c là 3 kích thước của khối hộp chữ nhật)

b. Thể tích khối chóp.

$V = \frac{1}{3}B.h$ (với B là diện tích đáy, h là chiều cao của khối chóp)

c. Thể tích khối lăng trụ.

$V = B.h$ (với B là diện tích đáy, h là chiều cao của lăng trụ)

* Đặc biệt: - Thể tích khối tứ diện đều cạnh a là $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

- Thể tích khối 8 mặt đều có cạnh bằng a là: $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 15. Cho tam giác ABC cố định và một điểm S thay đổi. Thể tích của khối chóp S.ABC có thay đổi hay không nếu:

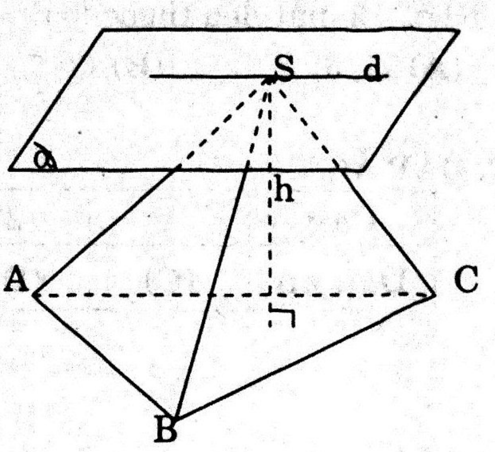
a) Đỉnh S di chuyển trên một mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC)?

b) Đỉnh S di chuyển trên một mặt phẳng song song với chỉ một cạnh đáy?

c) Đỉnh S di chuyển trên một đường thẳng song song với một cạnh đáy?

Giải

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h$. Trong đó $S_{\Delta ABC}$ không đổi, $h = d(S; (ABC))$



a) Khi S di chuyển trên (α) // (ABC) thì d(S; (ABC)) = d((α) ; (ABC)) không đổi nên $V_{S.ABC}$ không thay đổi.

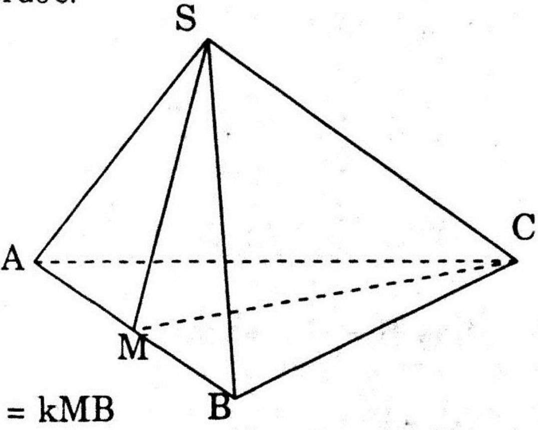
b) Khi S di chuyển trên một mặt phẳng song song với một cạnh đáy. Mặt phẳng này có thể không song song với mp (ABC)

Khi đó h = d(S: (ABC)) có thể thay đổi nên $v_{S.ABC}$ có thể thay đổi

c) Giả sử S di chuyển trên d và d // AC (d // AC $\Rightarrow$ d // (ABC))

d(S; (ABC)) = d(d; (ABC)) không đổi nên $V_{S.ABC}$ không đổi.

Bài 16. Hãy chia một khối tứ diện thành hai khối tứ diện sao cho tỉ số thể tích của hai khối này bằng số k > 0 cho trước.



Giải

Gọi M là một điểm trên cạnh AB khác hai đầu mút). Khi đó (SMC) chia tứ diện S.ABC thành hai tứ diện S.ABC thành hai tứ diện S.AMC và S.BMC lần lượt có thể tích V_1; V_2

Vì d(S; (AMC)) = d(S; (BMC)) nên

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta BMC}} = \frac{AM}{MB}. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V_2} = k \text{ nếu } AM = kMB$$

Kết luận: Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho AM = kMB. Khi đó, khối tứ diện SABC được chia thành hai khối tứ diện SAMC và SBMC thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 17. Tính thể tích của khối hộp ABCD.A'B'C'D' biết rằng AA'B'D' là khối tứ diện đều cạnh a.

Giải

Vì h = d ((ABCD) ; (A'B'C'D')) = d(A; (A'B'D')) và $S_{\square A'B'C'D'} = 2.S_{\Delta A'B'D'}$

Nên $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{A'B'C'D'}.h$

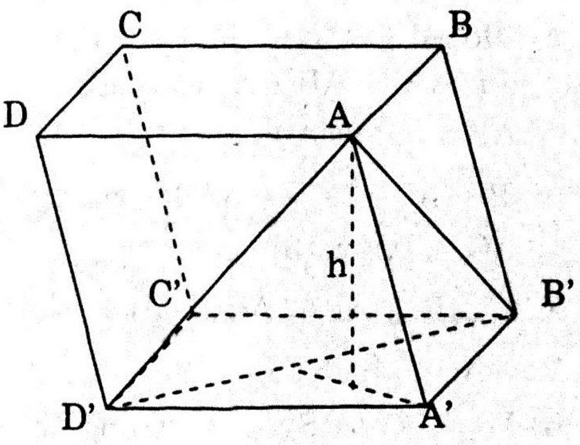
$= 2.\ S_{\Delta A'B'D'}.h$

$= 6.(\frac{1}{3}S_{\Delta A'B'D'}.h)$

$= 6.V_{AA'B'D'}$

mà $V_{A.A'B'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Nên $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$



Bài 18. Tính thể tích của một khối n – có tất cả các cạnh đều bằng a

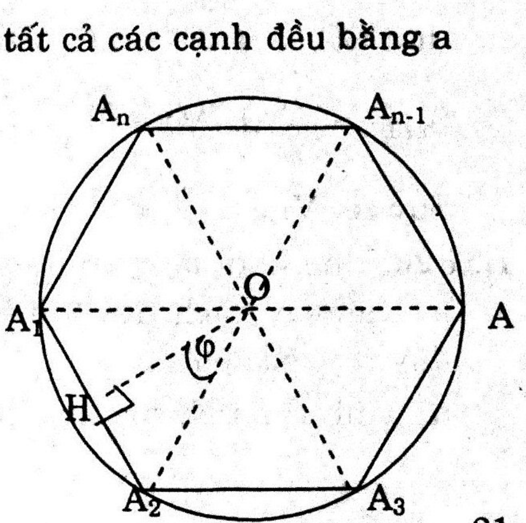
Giải

Xét lăng trụ n – giác đều $A_1A_2....A_n.A_1'A_2'.....A_n'$ có tất cả các cạnh bằng a.

Ta có: V = S.h, trong đó

S là diện tích n-giác đều $A_1A_2......A_n$ cạnh a.

h là chiều cao của lăng trụ.



V là thể tích của lăng trụ

- Theo đề ra: $h = a$

$S = n.\ S_{\Delta OA_1A_2}$ (O là tâm của đáy $A_1A_2.....A_n$)

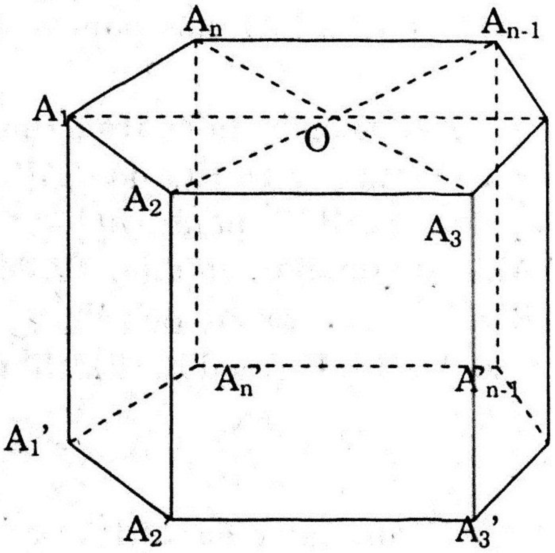
$= n.\ \frac{1}{2}A_1A_2.OH\ = n.\ \frac{1}{2}a.HA_2\cot\varphi$

$= n.\ \frac{1}{2}a.\ \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}$

(vì $\varphi = \frac{1}{2}.\widehat{A_1OA_2} = \frac{1}{2}.\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$)

Vậy $S = \frac{1}{4}n.a^2.\cot\frac{\pi}{n}$

Do đó $V = \frac{1}{4}n.a^3.\cot\frac{\pi}{n}$

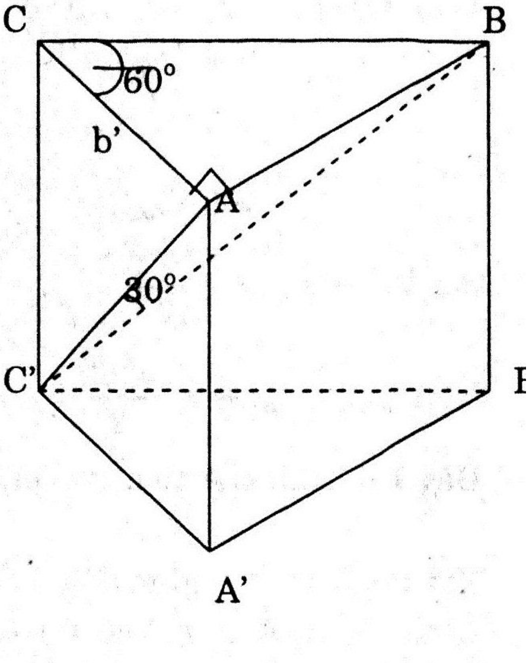


Bài 19. Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuôn tại A, AC = b, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với mp (AA'CC') mộ góc 30°

a) Tính độ dài đoạn thẳng AC'

b) Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Giải



a) Do ABC.A'B'C' là lăng trụ đứng nên AA' ⊥ AB mà AC ⊥ AB

$\Rightarrow AB \perp (ACC'A')$

$\Rightarrow \widehat{BC'A} = 30^\circ$ và $\Delta ABC'$ vuông tại A.

$\Rightarrow AC' = AB.\cot30^\circ$

Xét ΔABC: $AB = AC\tan\widehat{ACB} = b\sqrt{3}$

Vậy $AC' = b\sqrt{3} , \sqrt{3} = 3b$

b) $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.h$; trong đó

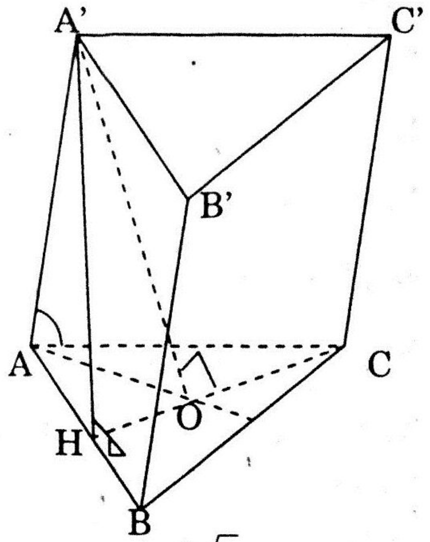
$h = CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2b\sqrt{2}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $V_{ABC.A'B'C'} = b^3\sqrt{6}$

Bài 20. Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạn a. Điểm A' cách đều 3 điểm A, B, C, cạnh bên AA' tạo với mặt phẳn đáy một góc 60°

a) Tính thể tích của khối lăng trụ đó.



b) Chứng minh rằng mặt bên BCC'B' là một hình chữ nhật.

c) Tính tổng diện tích các mặt bên của hình lăng trụ ABC.A'B'C' (Tổng đó gọi là diện tích xung quanh của hình (hoặc khối) lăng trụ đã cho)

Giải

a) Gọi O là tâm của tam giác ABC, vì OA = OB = OC nên $A'O \perp (ABC)$

$\Rightarrow \widehat{A'AO} = 60^\circ$.

Ta có $h = A'O = AO.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$ và $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Nên $V_{\text{lăngtrụ}} = S_{\Delta ABC}.h = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

b) Ta có $BC \perp AO$ nên $BC \perp AA'$ (định lí 3 đường vuông góc)

Lại có $AA' // CC' \Rightarrow BC \perp CC'$

Tứ giác BB'C'C là hình bình bình hành có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

c) $S_{xq} = 2S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C}$

Gọi H là trung điểm của AB, dễ thấy $A'H \perp AB$ và

$$A'H = \sqrt{AO^2 + OH^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$$

Nên $S_{xq} = 2.A'H.AB + BB'.BC = 2.\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}.a + \frac{2a\sqrt{3}}{3}a$

(vì $BB' = AA' = 2AO = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$)

Vậy $S_{xq} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{13} + 2)$

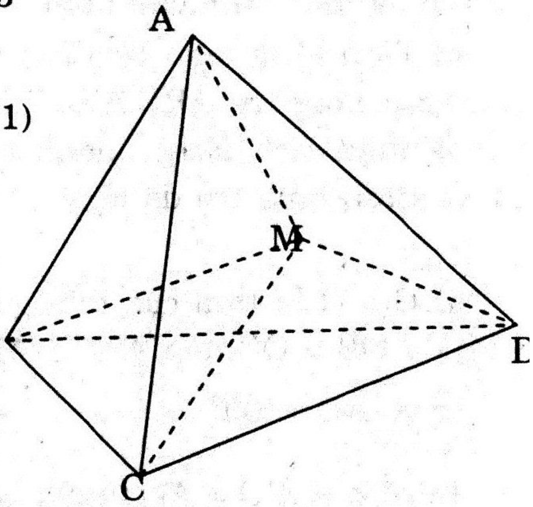
Bài 21. Cho điểm M nằm trong hình tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M tới bốn mặt của hình tứ diện là một số không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Tổng đó bằng bao nhiêu nếu cạnh của tứ diện đều bằng a?

Giải

Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ M đến (ABC),(ACD), (ABD), (BCD). Khối tứ diện ABCD được chia thành 4 khối tứ diện MABC, MACD, MABD, MBCD.

Ta có $V_{ABCD} = V_{M.ABC} + V_{MACD} + V_{MABD} + V_{MBCD}$

$= \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h_1 + \frac{1}{3}S_{\Delta ACD}.h_2 + \frac{1}{3}S_{\Delta ABD}.h_3 + \frac{1}{3}S_{\Delta BCD}.h_4$



Lại vì $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BCD}$

Nên $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.S_{\Delta BCD}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$ (1)

Gọi h là chiều cao của tứ diện đều, ta có:

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}$ (2)

Từ (1) và (2) có: $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$

Nếu cạnh của tứ diện đều bằng a thì

$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

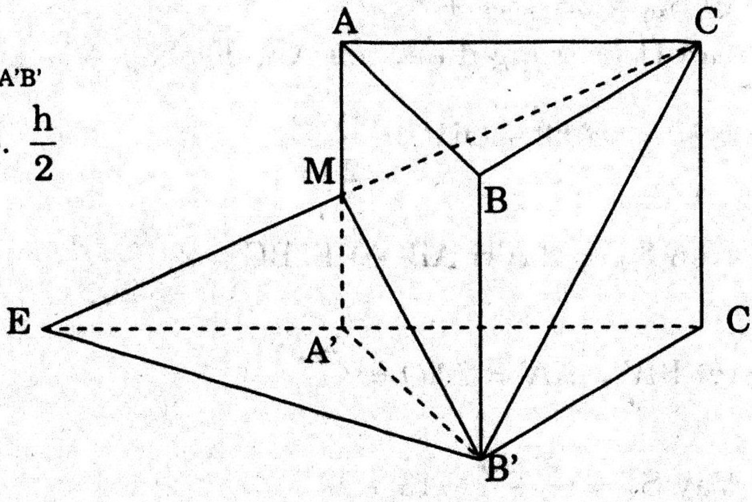
Bài 22. Cho khối lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của AA'. Mặt phẳng đi qua M, B', C chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Giải

Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của lăng trụ. V_1, V_2 lần lượt là thể tích phần lăng trụ nằm bên trên, bên dưới thiết diện MB'C

$E = CM \cap C'A'$, do M là trung điểm của AA' nên A'E = A'C'

$\Rightarrow S_{\Delta EA'B'} = S_{\Delta A'B'C'} = S$



Ta có: $V_2 = V_{C.EB'C'} - V_{M.EA'B'}$

$= \frac{1}{3}.2S.h - \frac{1}{3}S.\frac{h}{2}$

$= \frac{1}{2}S.h - \frac{1}{2}V$

$V_1 = V - V_2 = \frac{1}{2}V$

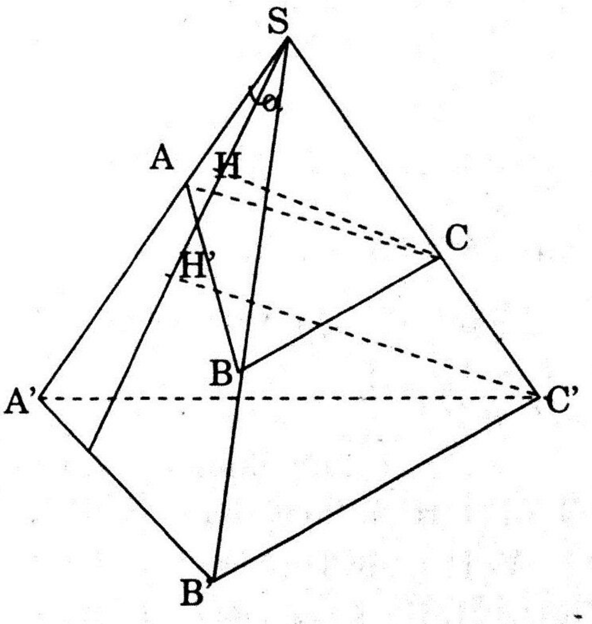
Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 1$

Bài 23. Cho khối chóp tam giác S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp S.ABC và S.A'B'C'

Chứng minh rằng: $\frac{V}{V'} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$

Giải

Ta có $\frac{V}{V'} = \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{V_{C.SAB}}{V_{C'.SA'B'}}$ (1)



Kẻ CH, C'H' vuông góc với (SAB) (H, H' ∈ (SAB)) ⇒ CH // CH' và S, H, H' thẳng hàng nên $\frac{CH}{C'H'} = \frac{SC}{S'C'}$ (2)

Mặt khác, $\frac{V_{C.SAB}}{V_{C'.SA'B'}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\Delta SAB}.CH}{\frac{1}{3}S_{\Delta SA'B'}.C'H'}$

$= \frac{SA.SB.\sin\alpha.CH}{SA'.SB'.\sin\alpha.CH'}$

(với $\alpha = \widehat{ASB}$)

$= \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{CH}{C'H'}$ (3)

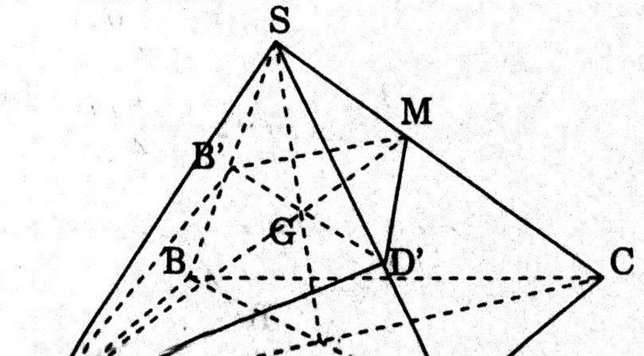
Từ (1), (2), (3) suy ra : $\frac{V}{V'} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$.

Bài 24.

Khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành, M là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (P) đi qua AM, song song với BD, chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Giải

Gọi B' = (P) ∩ SB ; D' = (P) ∩ SD ; O = AC ∩ BD



Khi đó : B'D', AM, SO đồng quy tại trọng tâm G của ΔSAC và B'D' // BD (do (P) // BD)

Cách 1.

Ta có : $\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$ (1)

Lại có : GB' = GD'

$\Rightarrow S_{\Delta AB'M} = S_{\Delta AD'M}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{V_{S.AB'MD'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2.V_{S.AD'M}}{2.V_{SADC}} = \frac{SA.SD'.SM}{SA.SD.SC} = \frac{SD'}{SD}.\frac{SM}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\frac{V_{S.AB'MD'}}{V_{AB'MD'BCD}} = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Do $\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$ nên :

$$\frac{V_{SAB'M}}{V_{SABC}} = \frac{SB'.SM}{SB.SC} = \frac{SD'}{SD}.\frac{SM}{SC} = \frac{V_{S.AD'M}}{V_{SADC}}$$

$$\frac{V_{S.AB'M} + V_{S.AD'M}}{V_{S.ABC} + V_{SADC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SM}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Hay $\frac{V_{S.AB'MD'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.AB'MD'}}{V_{AB'MD'BCD}} = \frac{1}{2}$.

Bài 25. Chứng minh rằng nếu có phép vị tự tỉ số k biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D' thì $\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = |k|^3$.

Giải

Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD). Giả sử phép vị tự tỉ số k biến A, B, C, D, H lần lượt thành A', B', C', D', H'.

Vì H ∈ (BCD) nên H' ∈ (B'C'D'). Hơn nữa, theo tính chất của phép vị tự thì A'H' song song hoặc trùng với AH; (B'C'D') song song hoặc trùng với (BCD) mà AH ⊥ (BCD) nên A'H' ⊥ (B'C'D'). Vậy A'H' là đường cao của tứ diện (A'B'C'D') (1)

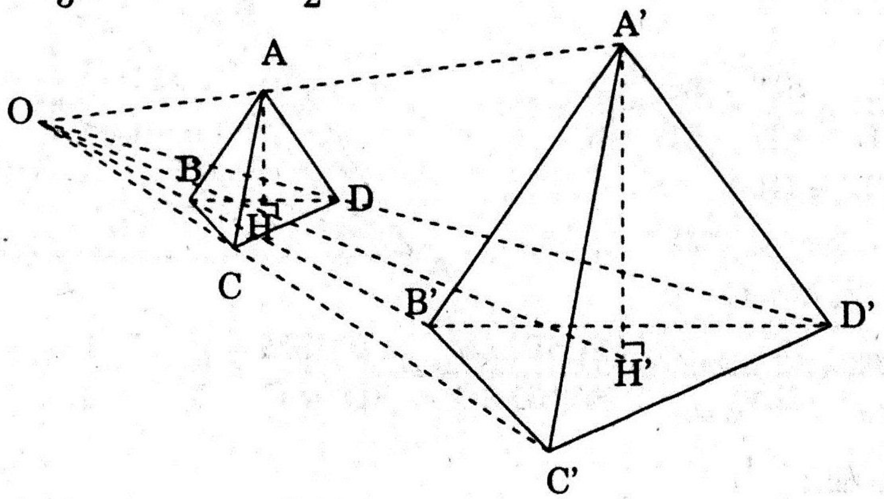
Mặt khác, dễ thấy $\widehat{CBD} = \widehat{C'B'D'} = \varphi$ (2)

Hơn nữa, cũng từ tính chất của phép vị tự ta có:

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{B'D'}{BK} = |k| \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có :

$$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\Delta B'C'D'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}.AH} = \frac{\frac{1}{2}B'C'}{\frac{1}{2}BC}.\frac{B'D'}{BD}.\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}.\frac{A'H'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}.\frac{B'D'}{BD}.\frac{A'H'}{AH} = |k|^3.$$



III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

1. Nếu ba kích thước của khối hộp chữ nhật tăng lên 2m lần thì thể tích của nó tăng lên :

(A) $2m^3$ lần ; **(B)** $8m^3$ lần ; **(C)** $4m^2$ lần ; **(D)** 2m lần.

2. Cho khối lăng trụ tam giác có độ dài các cạnh đáy là 10cm, 17cm, 21cm. Cạnh bên bằng $10\sqrt{2}$ cm và tạo với đáy một góc 45°. Thể tích của khối lăng trụ đó là :

(A) 480cm^3 ; **(B)** 280cm^3 ; **(C)** $840\sqrt{2}\text{ cm}^3$; **(D)** 2520cm^3.

3. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có AA' = 2a, AB = a, $BC = a\sqrt{2}$, $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Thể tích của khối hộp là :

(A) a^3 ; **(B)** $\frac{2a^3}{3}$; **(C)** $2a^3\sqrt{3}$; **(D)** $2a^3$.

4. Cho khối 20 mặt đều H có thể tích là V và diện tích mỗi mặt là S. Khi đó tổng khoảng cách từ một điểm bên trong của H đến các mặt của nó bằng :

(A) $\frac{V}{S}$; **(B)** $\frac{4V}{3S}$; **(C)** $\frac{3V}{S}$; **(D)** $\frac{3V}{4S}$.

5. Cho hình chóp đều H. Nếu mỗi cạnh của đáy tăng lên k lần và chiều cao giảm đi k lần thì thể tích của H là :

(A) không thay đổi ; **(B)** tăng lên k lần ;

(C) giảm đi k lần ; **(D)** tăng lên (k – 1) lần.

6. Nếu phép vị tự tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ biến đa diện H thành đa diện H' thì tỉ số $\frac{V_H}{V_{H'}}$ bằng :

(A) $\frac{1}{8}$; **(B)** $\frac{1}{4}$; **(C)** 4 ; **(D)** 8.

IV. ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	**(B)**	**(A)**	**(D)**	**(C)**	**(B)**	**(D)**

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA.

Câu 1. Khối lăng trụ n – giác có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh và bao nhiêu mặt? Khối chóp n – giác có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh và bao nhiêu mặt?

Hướng dẫn

– Khối lăng trụ n – giác có 2n đỉnh, 3n cạnh và n + 2 mặt.

– Khối chóp n – giác có n + 1 đỉnh, 2n cạnh và n + 1 mặt.

Câu 2. Nhưng khối đa diện đều nào có mặt là tam giác đều? Mỗi đỉnh của nó lạ đỉnh chung của bao nhiêu mặt?

Hướng dẫn

Các khối đa diện đều loại {3 ; p} có mỗi mặt là tam giác đều (trong đó p = 3, p = 4 hoặc p = 5).

– Khối đa diện đều loại }3 ; 3} là tứ diện đều, mỗi đỉnh là đỉnh chung của 3 cạnh.

– Khối đa diện đều loại {3 ; 4} là khối 8 mặt đều, mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 cạnh.

– Khối đa diện đều loại {3 ; 5} là khối 20 mặt đều, mỗi đỉnh là đỉnh chung của 5 cạnh.

Câu 3. Nếu biết thể tích của một khối chóp và diện tích mặt đáy của nó thì có thể biết được chiều cao của khối chóp đó hay không?

Hướng dẫn

Nếu một khối chóp có thể tích là V và diện tích mặt đáy của nó là S thì chiều cao của nó được tính theo công thức $h = \frac{3V}{S}$.

Câu 4. Nếu mỗi kích thước của một hình hộp chữ nhật được tăng lên k lần thì thể tích của khối đó tăng lên bao nhiêu lần?

Hướng dẫn

Nếu mỗi kích thức của 1 hình hộp chữ nhật được tăng lên k lần thì thể tích khối hộp đó được tăng lên k^3 lần.

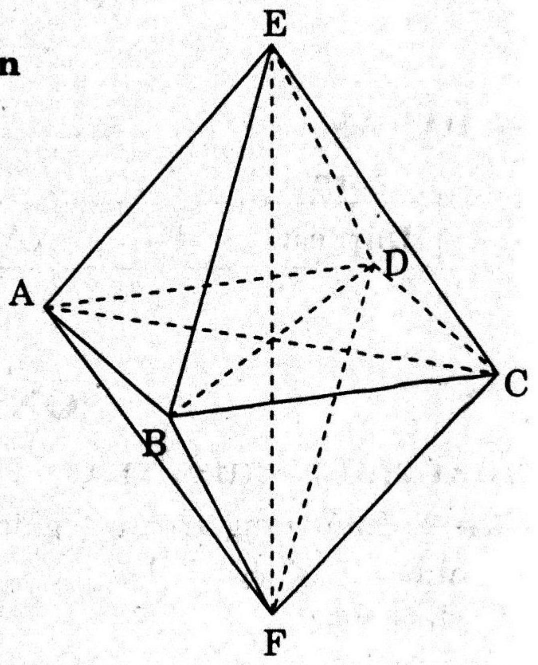
Câu 5. Hình tứ diện đều, hình lập phương, hình bát diện đều có những mặt phẳng đối xứng nào?

Hướng dẫn

– Hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng. Đó là các mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm của cạnh đối diện.

– Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng, gồm 3 mặt phẳng trung trực của 3 cạnh cùng xuất phát tại một đỉnh ; các mặt phẳng xác định bởi một cặp cạnh đối diện của hình lập phương.

– Hình bát diện đều ABC.DEF có 9 mặt phẳng đối xứng gồm : (ABCD), (BEDF), (AECF), mặt phẳng phẳng trung trực của các cạnh AB, AD, AE, AF, BE, BF.



Câu 6. Nếu tỉ số các cạnh tương ứng của hai tứ diện đồng dạng bằng k thì tỉ số thể tích của hai khối tứ diện ấy bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn

Nếu tỉ số các cạnh tương ứng của hai tứ diện đồng dạng k thì tỉ số thể tích của hai khối tứ diện ấy bằng k^3.

(Tham khảo bài tập 25)

II. BÀI TẬP.

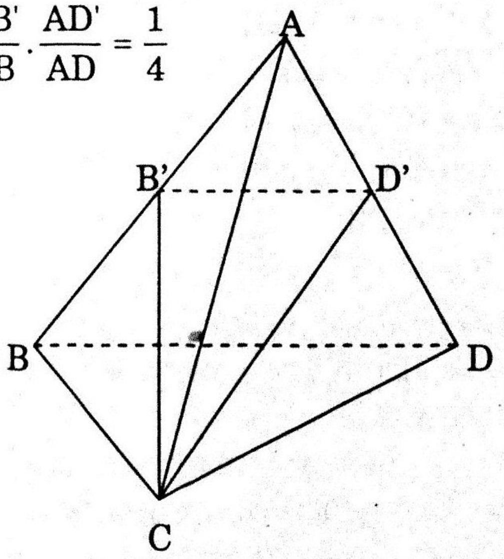
Bài 1. Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Gọi B' và D' lần lượt là trung điểm của AB và AD. Mặt phẳng (CB'D') chia khối tứ diện thành 2 phần. Tính thể tích mỗi phần đó.

Giải

Mặt phẳng (CB'D') chia khối tứ diện ABC thành hai khối chóp là AB'C'D' và C.BB'D'D ta có : $\frac{V_{AB'CD'}}{V} = \frac{AB'}{AB}\cdot\frac{AD'}{AD} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow V_{AB'CD'} = \frac{1}{4}V$$

$$V_{C.BB'D'D} = V - V_{AB'CD'} = \frac{3}{4}V.$$



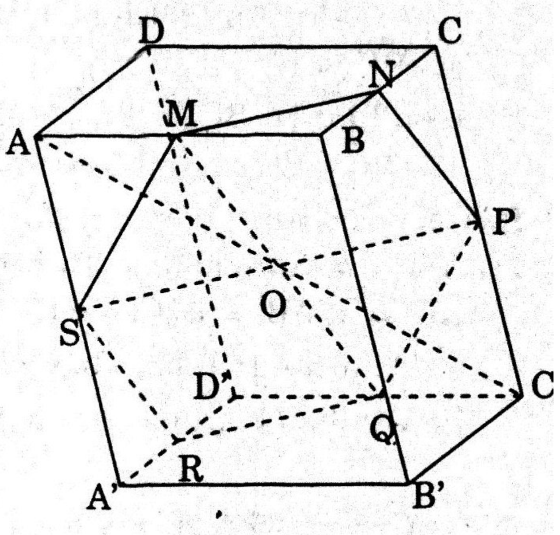
Bài 2. Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng sáu trung điểm của sáu cạnh AB, BC, CC', C'D', D'A' và A'A nằm trên một mặt phẳng và mặt phẳng đó chia khối hộp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Giải

Gọi O là giao điểm của các đường chéo của hình hộp. Ta có O là trung điểm của AC', Tứ giác AMC'Q là hình bình hành nên O là trung điểm của MQ.

Vậy O, M, Q thẳng hàng. Hơn nữa MN, SP, RQ đôi một song song và lần lượt đi qua O, M, Q nên M, N, P, Q, R, S cùng nằm trên mp(α) đi qua O (và mp(α) // (ACD')).

Ta thấy D là trung điểm của AC', BD', A'C, B'D, MQ, NR, SP nên (α) chia khối hộp thành hai phần là ảnh của nhau qua $V_{(0,\,-1)}$ (hay phép đối xứng tâm O) do đó chúng có thể tích bằng nhau.



Bài 3. Cho khối tứ diện ABCD, E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Hai mp(ABF) và (CDE) chia khối tứ diện ABCD thành 4 khối tứ diện.

a) Kể tên bốn khối tứ diện đó.

b) Chứng tỏ rằng bốn khối tứ diện đó có thể tích bằng nhau.

c) Chứng tỏ rằng nếu ABCD là khối tứ diện đều thì bốn khối tứ diện nói trên bằng nhau.

Giải

a) 4 khối tứ diện đó là : BCEF, ACEF, BDEF, ADEF.

b) Do E là trung điểm của AB nên $S_{\Delta BEF} = S_{\Delta AEF}$

$\Rightarrow V_{CBEF} = V_{CAEF}$ và $V_{DBEF} = V_{DAEF}$

Hay $V_{BCEF} = V_{ACEF}$

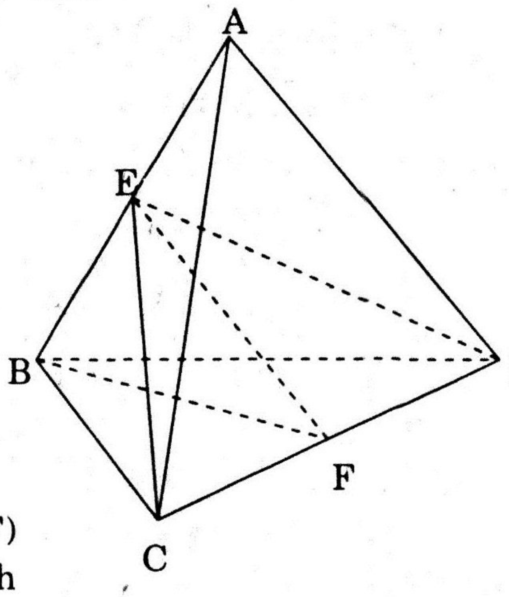
và $V_{BDEF} = V_{ADEF}$ (1)

Tương tự $S_{\Delta CEF} = S_{\Delta DEF}$

$\Rightarrow V_{ACEF} = V_{ADEF}$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow V_{BCEF} = V_{ACEF} = V_{ADEF} = V_{BDEF}$.



c) Nếu ABCD là khối tứ diện đều thì (CED), (ABF) là các mặt phẳng đối xứng của tứ diện.

Cách 1. Ta có : phép đối xứng qua (ABF) biến tứ diện BCEF thành BDEF, ACEF thành ADEF (1), phép đối xứng qua (CED) biến DBEF thành DAEF hay ADEF (2).

Từ (1) và (2) suy ra các tứ diện BCEF, BDEF, ACEF, ADEF bằng nhau.

Cách 2. Thực hiện phép đối xứng qua mặt phẳng (ABF).

Ta có : tứ diện BCEF biến thành BDEF, AECF biến thành AEDF (1)

Do EF là trục đối xứng của tứ diện nên phép đối xứng qua đường thẳn EF biến tứ diện BCEF thành ADEF (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 4. Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có diện tích đáy bằng S v AA' = h. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB', CC' tại A_1, B_1, C_1. Biế $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

a) Tính thể tích hai phần của khối lăng trụ được phân chia bởi (P).

b) Với điều kiện nào của a, b, c thì thể tích hai phần đó bằng nhau.

Giải

a) *Cách 1.* Giả sử $a \le b \le c$. Lấy B_2, C_2 lần lượt trên cạnh BB', CC' sa cho $BB_2 = a$, $CC_2 = a \Rightarrow B_1B_2 = b - a$; $C_1C_2 = c - a$.

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{ABC.A_1B_2C_2} + V_{A_1.B_1B_2C_2C_3} = a.S + V_{A_1.B_1B_2C_2C_3} \quad (*)$$

Vì $\dfrac{V_{A_1.B_1B_2C_2C_3}}{V_{A_1.B_1B_2C_2}} = \dfrac{S_{\text{hthang}B_1B_2C_2C_3}}{S_{\Delta B_1B_2C_2}} = \dfrac{\frac{1}{2}(B_1B_2 + C_1C_2)}{\frac{1}{2}B_1B_2}$ (hình thang và tam giác có cùng chiều cao)

$$\frac{V_{A_1.B_1B_2C_2C_3}}{V_{A_1B_1B_2C_2}} = \frac{b-a+c-a}{b-a}$$

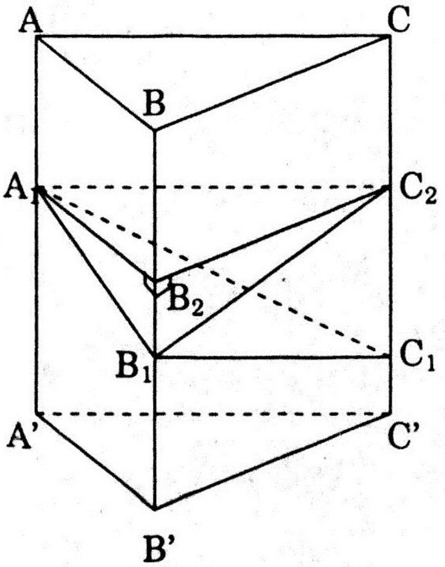
$$\Rightarrow V_{A_1.B_1B_2C_2C_3} = \left(\frac{b+c-2a}{b-a}\right).V_{A.B_1B_2C_2} = \frac{1}{3}.\frac{b+c-2a}{b-a}.B_1B_2.S$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{b+c-2a}{b-a}.(b-a).S = \frac{1}{3}(b+c-2a).S$$

Thay vào (*) ta được : $V_{ABC.A_1B_1C_1} = a.S + \frac{1}{3}(b+c-2a).S = \frac{1}{3}(a+b+c)S$

Tương tự : $V_{A'B'C'.A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}(h-a+h-b+h-c)S = \frac{1}{3}(3h-a-b-c)S$.

Cách 2. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c$.



Trên cạnh BB' lấy B_2 sao cho $BB_2 = a$

$\Rightarrow B_1B_2 = b - a$

Trên cạnh CC' lấy C_2 sao cho $CC_2 = a$

$\Rightarrow C_1C_2 = c - a$

Ta có :

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{ABC.A_1B_2C_2} + V_{A_1B_2C_2B_1} + V_{A_1B_1C_2C_1} \quad (*)$$

Trong đó :

$$V_{ABC.A_1B_2C_2} = AA_1.S_{\Delta ABC} = a.S \quad (1)$$

(lăng trụ đứng)

$$V_{A_1B_2C_2B_1} = \frac{1}{3}B_1B_2.S_{\Delta A_1B_2C_2} = \frac{1}{3}(b-a).S \quad (2)$$

(vì $B_1B_2 \perp (A_1B_2C_2)$, $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$)

$\dfrac{V_{A_1B_1C_2C_1}}{V_{A_1B_2C_2B_1}} = \dfrac{S_{\Delta B_1C_2C_1}}{S_{\Delta B_1C_2B_2}}$ (hai hình chóp có cùng chiều cao).

$= \dfrac{C_1C_2}{B_1B_2}$ (do $B_1B_2 // C_1C_2$ nên $d(C_2; B_1B_2) = d(B_1; C_1C_2)$)

$$= \frac{c-a}{b-a} \Rightarrow V_{A_1B_1C_2C_1} = \left(\frac{c-a}{b-a}\right).V_{A_1B_2C_2B_1} = \frac{1}{3}(c-a).S \quad (3)$$

Thay (1), (2) và (3) vào (*) ta được :

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = a.S + \frac{1}{3}(b-a).S + \frac{1}{3}(c-a).S = \frac{1}{3}(a+b+c).S$$

$$V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{ABC.A_1B_1C_1} = S.h - \frac{1}{3}(a+b+c)S = \frac{1}{3}(3h-a-b-c).S$$

Cách 3. Giả sử $a \le b \le c$

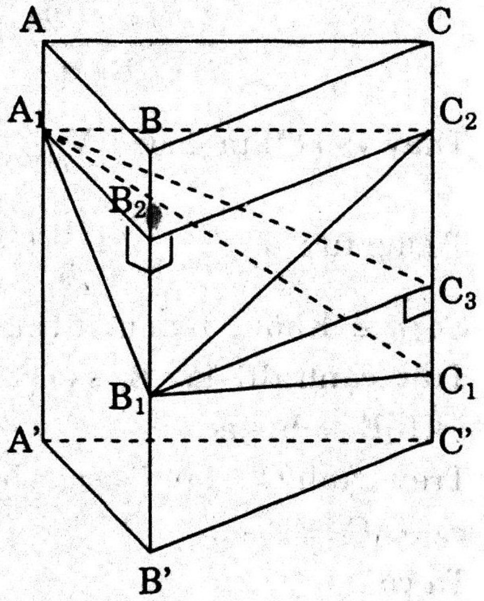
Trên cạnh BB' lấy B_2 sao cho $BB_2 = a \Rightarrow B_1B_2 = b - a$

Trên cạnh CC' lấy C_2, C_3 sao cho

$CC_2 = a$, $C_2C_3 = b - a \Rightarrow C_1C_3 = c - b$.

Ta có $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{ABC.A_1B_2C_2} + V_{A_1.B_1B_2C_2C_3} + V_{A_1B_1C_1C_3}$ (*)

Trong đó : $V_{ABC.A_1B_1C_1} = a.S$ (1)



$$V_{A_1.B_1B_2C_2C_3} = 2.V_{A_1B_1B_2C_2} = 2.\frac{1}{3}.B_1B_2.S_{\Delta A_1B_2C_2}$$

$$= \frac{2}{3}(b-a).S \quad (2)$$

$$\frac{V_{A_1B_1C_1C_3}}{V_{A_1B_1B_2C_2}} = \frac{S_{\Delta B_1C_1C_3}}{S_{\Delta B_1B_2C_2}} = \frac{C_1C_3}{B_1B_2} = \frac{c-b}{b-a}$$

$$\Rightarrow V_{A_1B_1C_1C_3} = \frac{c-b}{b-a}.V_{A_1B_1B_2C_2}$$

$$\Rightarrow V_{A_1B_1C_1C_3} = \frac{1}{3}(c-b).S \quad (3)$$

Thay (1), (2), (3) vào (*) :

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = a.S + \frac{2}{3}(b-a).S + \frac{1}{3}(c-b)S = \frac{1}{3}(a+b+c)S$$

Vậy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}(a+b+c)S$

Tương tự $V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = \frac{1}{3}[(h-a)+(h-b)+(h-c)]S = \frac{1}{3}(3h-a-b-c)S$

b) $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)S = \frac{1}{3}(3h-a-b-c)S$

$$\Leftrightarrow 3h = 2(a+b+c)$$

Bài 5. Cho khối lăng trụ đều ABC.A'B'C' và M là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Giải

Gọi V_1 là thể tích của phần chứa cạnh AA' ; V_2 là thể tích phần còn lại

S là diện tích đáy A'B'C', h là chiều cao của lăng trụ và V là thể tích của lăng trụ. Do BC // B'C' nên (ABC) cắt (MB'C') theo giao tuyến là đường thẳng d qua M và d // BC.

Gọi N = d ∩ AC. Dễ thấy A'A, B'M, C'N đồng quy tại S.

Và $\frac{SA}{SA'} = \frac{SM}{SB'} = \frac{SN}{SC'} = \frac{1}{2}$ (vì cùng bằng $\frac{AM}{A'B'}$) (*)

Ta có : $V_1 = V_{S.A'B'C'} - V_{S.AMN}$ (1) ;

$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3}SA'.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3}.2h.S = \frac{2}{3}V$ (2) ;

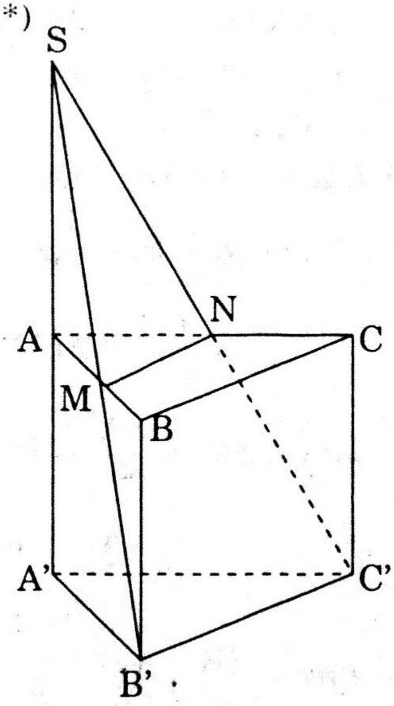
$\frac{V_{SAMN}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SM}{SB'}.\frac{SN}{SC'} = \frac{1}{8}$ (vì (*))

$\Rightarrow V_{SAMN} = \frac{1}{8}V_{SA'B'C'} = \frac{1}{12}V$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow V_1 = \frac{2}{3}V - \frac{1}{12}V = \frac{7}{12}V$

$V_2 = V - V_1 = \frac{5}{12}V.$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$



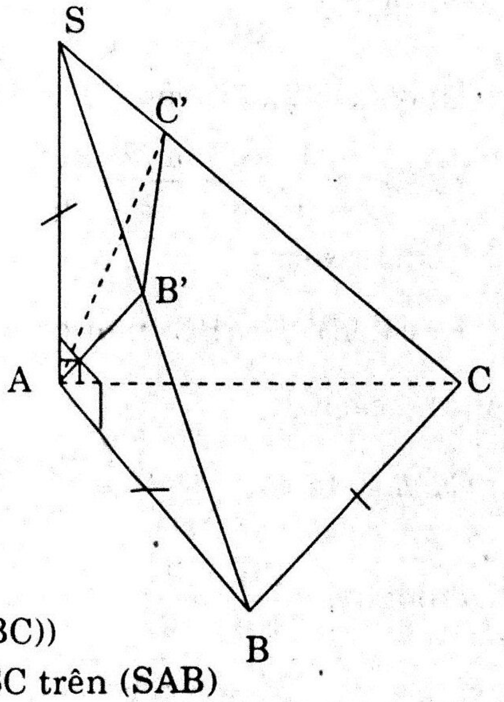
Bài 6. Cho khối chóp S.ABC có đường cao SA = a, đáy là tam giác vuông cân có AB = BC = a. Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A của ΔSAC.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABC.

b) Chứng minh rằng SC ⊥ (AB'C').

c) Tính thể tích khối chóp S.AB'C'.

Giải



a) $V_{SABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}$ (do SA ⊥ (ABC))

$= \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.BC$ (do AB ⊥ BC)

$= \frac{1}{6}a^3.$

b) *Cách 1.* Ta có : BC ⊥ AB (gt)

BC ⊥ SA (do SA ⊥ (ABC))

⇒ BC ⊥ (SAB) ⇒ SB là hình chiếu của SC trên (SAB)

Mặt khác : SA = AB (do đều bằng a) và B' là trung điểm của SB nên AB' ⊥ SB. Vậy AB' ⊥ SC (1) (Định lí 3 đường vuông góc)

Lại có, C' là hình chiếu của A trên SC nên AC' ⊥ SC (2)

Từ (1) và (2) suy ra SC ⊥ (AB'C')

Cách 2.

Ta có BC ⊥ (SAB) (vì BC ⊥ AB, BC ⊥ SA do SA ⊥ (ABC)) ⇒ BC ⊥ AB'

Lại có $SB \perp AB'$ (trung tuyến trong tam giác cân)

Vậy $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC$ (1)

Mặt khác, C' là hình chiếu của A trên SC nên $AC' \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AB'C')$

c) Tính $V_{SA'B'C'}$?

Cách 1. Vì $SC' \perp (AB'C')$ nên :

$$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3}.SC'.S_{\Delta AB'C'} = \frac{1}{3}SC'.\frac{1}{2}AB'.B'C' \text{ (vì } AB' \perp B'C' \text{ do } AB' \perp (SBC))$$

$$= \frac{1}{6}.SC'.AB'.B'C' \quad (*)$$

Ta có: $SC' = \dfrac{SA^2}{SC}$ (do AC' là đường cao trong tam giác vuông SAC)

$$= \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$AB'' = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (2) (Trung tuyến trong tam giác vuông)

$B'C' = \sqrt{AC'^2 - AB'^2}$ (do $AB'' \perp B'C'$)

Với $AC' = \dfrac{AS.AC}{SC} = \dfrac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; $AB' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B'C' = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ (3)

Thay (1), (2), (3) vào (*) ta được:

$$V_{SA'B'C'} = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3}{36}$$

* Nhận xét:

Ta có $AB' \perp (SBC)$ nên có thể lấy $V = \dfrac{1}{3}AB'.S_{\Delta SB'C'} = \dfrac{1}{6}AB'.B'C'.SC'$ rồi giải như cách 1.

Cách 2. ta có: $\dfrac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA.SB'.SC'}{SA.SB.SC} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SA^2}{SC^2}$

Trong đó : $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{1}{2}$; $SA = a$,

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{SA^2 + AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$$

Nên $\dfrac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a^2}{3a^2} = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow V_{SA'B'C'} = \dfrac{1}{6}V_{SABC} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{a^3}{6} = \dfrac{a^3}{36}$ (Theo câu a), $V_{SABC} = \dfrac{a^3}{6}$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

A. Đề bài.

1. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất:

(A) Một cạnh ; **(B)** Bốn cạnh; **(C)** Ba cạnh; **(D)** Hai cạnh.

2. Cho khối chóp có đáy là n – giác. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng:

(A) Số cạnh của khối chóp bằng $n + 1$;

(B) Số mặt của khối chóp bằng $2n$;

(C) Số đỉnh của khối chóp bằng $2n + 1$;

(D) Số mặt của khối chóp bằng số đỉnh của nó;

3. Phép đối xứng qua mp(P) biến đường thẳng d thành chính nó khi và chỉ khi:

(A) d song song với (P); **(B)** d nằm trên (P);

(C) $d \perp (P)$; **(D)** d nằm trên (P) hoặc $d \perp (P)$

4. Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Có bao nhiêu phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d':

(A) Có một ; **(B)** Có hai; **(C)** không có; **(D)** có vô số.

5. Cho hai đường thẳng phân biệt d và d' đồng phẳng. Có bao nhiêu phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d':

(A) Không có; **(B)** Có một; **(C)** Có hai; **(D)** Có một hoặc hai.

6. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng:

(A) Một; **(B)** Hai; **(C)** ba; **(D)** Bốn.

7. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng.

(A) Một; **(B)** hai; **(C)** ba; **(D)** Bốn.

8. Cho phép vị tự tâm O biến điểm A thành điểm B, biết rằng $OA = 2OB$. Khi đó tỷ số phép vị tự là bao nhiêu:

(A) 2; **(B)** -2; **(C)** $\pm\frac{1}{2}$; **(D)** $\frac{1}{2}$.

9. Cho hai đường thẳng song song d và d' và một điểm O, không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến d thành d'.

(A) Có một; **(B)** Không có;

(C) Có hai; **(D)** Có một hoặc không có.

10. Khối 8 mặt đều thuộc loại:

(A) $\{3; 3\}$; **(B)** $\{4; 3\}$; **(C)** $\{5; 3\}$; **(D)** $\{3; -4\}$

11. Khối 20 mặt đều thuộc loại:

(A) $\{3; 4\}$; **(B)** $\{3; 5\}$; **(C)** $\{4; 3\}$; **(D)** $\{4; 5\}$

12. Nếu ba kích thước của một khối hộp chữ nhật tăng lên k lần thì thể tích của nó tăng lên :

(A) k lần; **(B)** k^2 lần; **(C)** k^3 lần; **(D)** $3k^3$ lần.

13. Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 96. Thể tích củ khối lập phương đó là:

(A) 64; **(B)** 94; **(C)** 84; **(D)** 48.

14. Ba kích thước của một hình hộp chữ nhật làm thành một cấp số nhâ có cộng bội là 2. Thể tích hình hộp đã cho là 1728. Khi đó các kíc thước của hình hộp là:

(A) 8, 16, 32; **(B)** 2, 4, 8;

(C) $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, 38; **(D)** 6, 12, 24.

15. Các đường chéo của các mặt của một hình hộp chữ nhật là $a\sqrt{5}$, $a\sqrt{13}$ Thể tích của hình hộp đó là:

(A) 4; **(B)** 5; **(C)** 6; **(D)** 8.

16. Một khối lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy bằng 37cm, 13cm 30cm, và diện tích xung quanh bằng 480cm^3. Khi đó thể tích của khố lăng trụ là:

(A) 2010 ; **(B)** 1010; **(C)** 1080; **(D)** 2040.

17. Một khối lăng trụ tam giác có các cạnh đáy bằng 13cm, 14cm, 15cm cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° và có chiều dài 8cm. Kh đó thể tích của khối lăng trụ là:

(A) 340 ; **(B)** 336 ; **(C)** $274\sqrt{3}$; **(D)** $124\sqrt{3}$.

18. Đáy của một hình hộp đứng là hình thoi cạnh a, góc nhọn 60°. Đườn chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của hình hộp. Khi đó thể tíc của hình hộp là:

(A) a^3; **(B)** $a^3\sqrt{3}$; **(C)** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$; **(D)** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

19. Khi độ dài cạnh của hình lập phương tăng thêm 2cm thì thể tích của n tăng thêm 98cm^2. Cạnh của hình lập phương đã cho là:

(A) 4cm; **(B)** 5cm; **(C)**6cm; **(D)** 3cm.

20. Cho một hình hộp với sáu mặt đều là hình thoi cạnh a góc nhọn bằn 60°. Khi đó thể tích của hình hộp là:

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$; **(B)** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$; **(C)** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$; **(D)** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

21. Cho một hình lập phương có cạnh bằng a. Khi đó thể tích của khối mặt đều mà các đỉnh là các tâm của các mặt của hình lập phương đ cho bằng:

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$; **(B)** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$; **(C)** $\dfrac{a^3}{3}$; **(D)** $\dfrac{a^3}{9}$.

22. Cho một khối tứ diện đều có cạnh bằng a. Khi đó thể tích của khối mặt đều mà các đỉnh là trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đ cho là:

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$; **(B)** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$; (C) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$; **(D)** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

23. Cho khối 12 mặt đều H có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S. Khi đó tổng các khoảng cách từ một điểm bên trong của H đến các mặt của nó bằng:

(A) $\frac{3V}{4S}$; **(B)** $\frac{V}{4S}$; (C) $\frac{3V}{S}$; **(D)** $\frac{V}{S}$.

24. Một khối lăng trụ có các cạnh đáy bằng 19, 20, 37, đường cao của khối lăng trụ bằng trung bình cộng của các cạnh đáy. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là:

(A) 2888 ; **(B)** $1245\sqrt{2}^{3}$; (C) 1123 ; **(D)** 4273.

25. Đáy của một hình hộp là một hình thoi có cạnh bằng 6cm và góc nhọn bằng 45°, cạnh bên hình hộp dài 10cm, tạo với mặt phẳng đáy một góc 45°. Khi đó thể tích của hình hộp là:

(A) $124\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; **(B)** 180cm^3 ; (C) $120\sqrt{2}\,\text{cm}^3$; **(D)** $180\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

26. Với một tấm bìa hình vuông, người ta cắt bỏ ở mỗi góc tấm bia một hình vuông cạnh 12cm rồi gấp lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Nếu thể tích các hộp là 4800cm^3 thì cạnh tấm bia có độ dài là:

(A) 42cm; **(B)** 36cm; (C) 44cm; **(D)** 38cm.

27. Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của hình chóp đó là:

(A) $\frac{a^3\cot\alpha}{12}$; **(B)** $\frac{a^3\tan\alpha}{12}$; (C) $\frac{a^2\tan\alpha}{12}$; **(D)** $\frac{a^3\tan\alpha}{4}$.

28. Một hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của hình chóp là:

(A) $\frac{3}{4}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$; **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$;

(C) $\frac{3}{4}b^3\cos\alpha\sin^2\alpha$; **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\cos\alpha\sin\alpha$.

29. Cho một hình chóp tứ giác đều H có diện tích đáy bằng 4 và diện tích của một mặt bên bằng $\sqrt{2}$. Thể tích của H là:

(A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; **(B)** 4 ; (C) $\frac{4}{3}$; **(D)** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

30. Một khối chóp tam giác có các cạnh đáy bằng 6, 8, 10. Cạnh bên có độ dài 4 và tạo với đáy một góc 60°. Thể tích của khối chóp đó là:

(A) $16\sqrt{3}$; **(B)** $8\sqrt{3}$; (C) $16\frac{\sqrt{2}}{3}$; **(D)** 16π.

31. Nếu một hình chóp đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó tăng lên:

(A) n^2 lần ; **(B)** $2n^2$ lần; **(C)** n^3 lần; **(D)** $2n^3$ lần.

32. Khi chiều cao của một hình chóp đều tăng lên n lần, nhưng mỗi cạnh đáy giảm đi n lần thì thể tích của nó:

(A) Không thay đổi; **(B)** Tăng lên n lần;

(C) Tăng lên (n – 1) lần; **(D)** Giảm đi n lần.

B. ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Đáp án	**(C)**	**(D)**	**(D)**	**(B)**	**(D)**	**(D)**	**(C)**	**(C)**	**(D)**	**(D)**	**(B)**

Câu	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Đáp án	**(C)**	**(A)**	**(D)**	**(C)**	**(C)**	**(B)**	**(D)**	**(D)**	**(B)**	**(D)**	**(A)**

Câu	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
Đáp án	**(C)**	**(A)**	**(B)**	**(C)**	**(B)**	**(B)**	**(C)**	**(A)**	**(C)**	**(D)**	

C. Hướng dẫn giải.

1. Chọn **(C).** Vì không có hình đa diện nào mỗi đỉnh là đỉnh chung của mộ cạnh hoặc hai cạnh.

2. Khối chóp n- giác có 2n cạnh, n + 1 mặt, n + 1 đỉnh nên chọn đáp an **(D).**

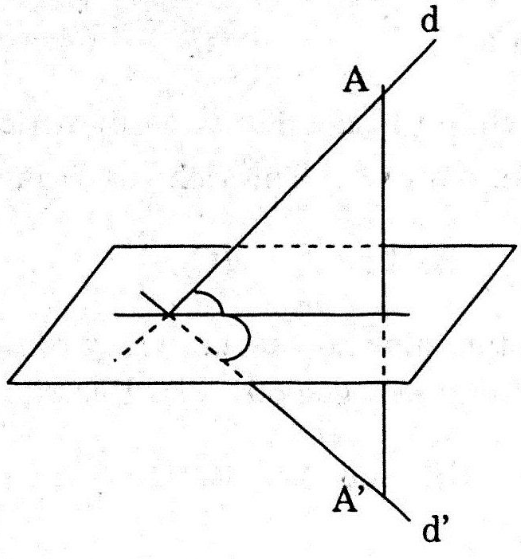
3. Xem lời giải bài tập 6 §2. Chọn **(D)**

4. Phép đối xứng qua mặt phẳng chứa đường phân giác của góc tạo bởi ha đường thẳng cắt nhau d, d’ và vuông góc với mp (d; d’) biến d thành d’ Vì hai đường thẳng cắt nhau d, d’ có hai phân giác nên có hai phép đ xứng qua mặt phẳng biến d thành d’. Vậy chọn **(B).**

5. Vì d, d’ phân biệt và đồng phẳng nên d // d’ hoặc d cắt d’.

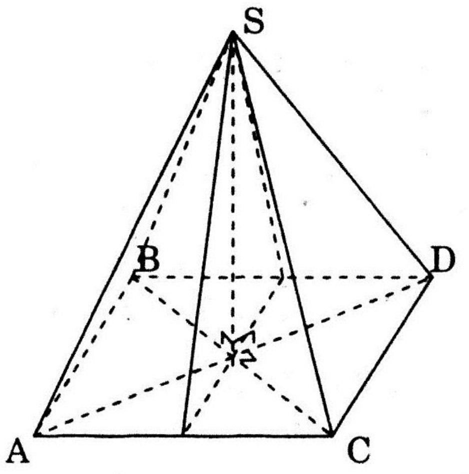
- Nếu d // d’ thì có 1 phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d’, (đó là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (d; d’) và cách đều d, d’)

- Nếu d cắt d’, có phép đối xứng qua mặt

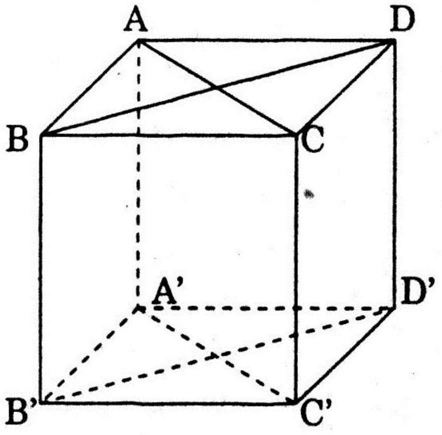


phẳng biến d thành d'. (xem câu 4)

Vậy chọn đáp án **(D)**



6. Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có 4 mặt phẳng đối xứng là: (SAC), (SBD), mặt phẳng trung trực của các cạnh AB, AD. Chọn **(D)**



7. Hình thoi có hai đường chéo vuông góc và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, ABCD.A'B'C'D' là hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải hình vuông) có các mặt phẳng đối xứng là: (ACC'A'), (BDD"B"), mặt phẳng trung trực của cạnh AA'

Vậy chọn đáp án **(C)**

8. Vì $V_{(0,k)} : A \mapsto B$ nên $\overrightarrow{OB} = k.\overrightarrow{OA} \Rightarrow |k|.OA \Rightarrow OA = \frac{1}{|k|}.OB$

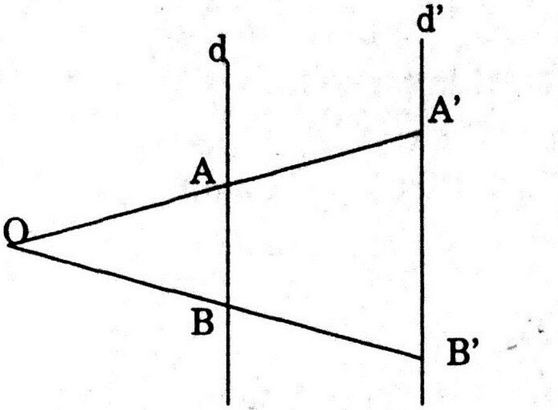
Vậy $\frac{1}{|k|} = 2 \Leftrightarrow |k| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2}$. Chọn **(C)**

9. Nếu O $\overline{\in}$ mp(d; d') thì không có phép vị tự nào biến d thành d'

- Nếu O $\in$ mp(d; d'), O $\overline{\in}$ d, O $\overline{\in}$ d'

Có 1 phép vị tự tâm O biến d thành d'

Vậy chọn **(D)**.



10. Khối 8 mặt đều có mỗi mặt là tam giác đều, mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 cạnh nên là đa diện đều loại {3; 4}

→ Chọn **(D)**

11. Khối 20 mặt đều có: mỗi mặt là tam giác đều, mỗi đỉnh chung của 5 cạnh nên là đa diện đều loại {3; 5}. Chọn **(C)**.

12. Ba kích thước của khối hộp là a, b, c, thì thể tích của nó V = abc, nếu tăng mỗi kích thước lên k lần thì thể tích là (ka).(kb).(kc) = k^3.V

Vậy thể tích tăng lên k^3 lần. Vậy chọn **(C)**.

13. Hình lập phương cạnh a có tổng diện tích các mặt là :

$6a^2 = 96 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow V = a^3 = 64 \Rightarrow$ Chọn **(A)**

14. Gọi 3 kích thước của hình hộp chữ nhật đó là a, 2a, 4a

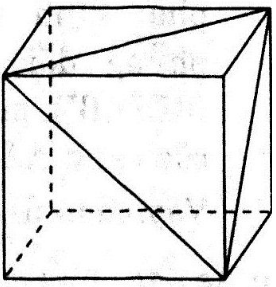
$\Rightarrow V = a.2a.4a = 8a^3$

Mà $V = 1728 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\dfrac{1728}{8}} = 6$

Vậy 3 kích thước là: 6, 12, 24 ⇒ Chọn **(D)**

15. Gọi 3 kích thước của hình hộp là x, y, z. Khi đó các đường chéo của 3 mặt (đôi một không song song) là $\sqrt{x^2 + y^2}$, $\sqrt{y^2 + z^2}$, $\sqrt{z^2 + x^2}$ (hình 42)

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \\ \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{10} \\ \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + z^2 = 10 \\ z^2 + x^2 = 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$$



$\Rightarrow z^2 = 9, x^2 = 4, y^2 =$

Vậy $V = x.y.z = \sqrt{9.1.4} = 6 \Rightarrow$ Chọn **(C)**

16. $S_{đáy} = \sqrt{40(40 - 37)(40 - 13)(40 - 30)}$ (công thức Herông)

$= 180$

$S_{xq} = h.2p$ (với h: chiều cao, 2p: chu vi đáy)]

$= 80h$

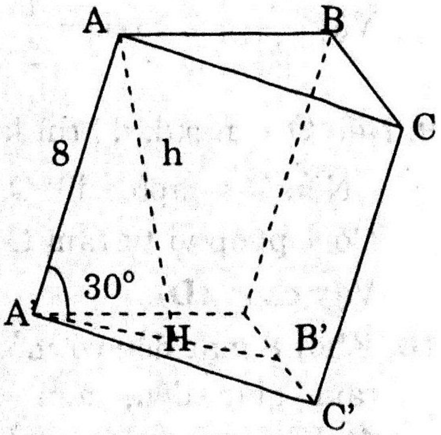
Mà $S_{xq} = 480$

$\Rightarrow h = \dfrac{480}{80} = 6$

$V = h.s = 6.180 = 1080$. Vậy chọn **(C)**

17. $S_{đáy} = 84.cm^2$ (theo công thức Hêrông)

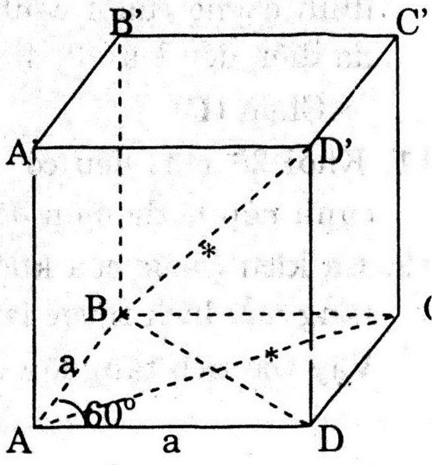
Gọi H là hình chiếu của A trên (A'B'C') (hình 43)



$\Rightarrow \widehat{AA'H} = 30^\circ$, AA' = 8

AH = AA'.sin30° = 4 = h

$\Rightarrow V = S_{đáy}.h = 84.4 = 336 \Rightarrow$ Chọn **(B)**



18. Xét hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow AC > BD$ nên AC = BD'.

Trong hình thoi ABCD : $AC^2 + BD^2 = 4a^2$

$\Rightarrow AC^2 = 3a^2 \Rightarrow BD'^2 = 3a^2$. Xét tam giác BDD' có:

$DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = D'D.S_{ABCD} = a\sqrt{2}.AB.AD.\sin 60^\circ$

$$= a\sqrt{2}.a^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}.\text{ Chọn } \mathbf{(D)}$$

19. Gọi a là cạnh của lập phương H đã cho (a > 0)(đơn vị cm) thì cạnh của lập phương H' là (a + 2)cm.

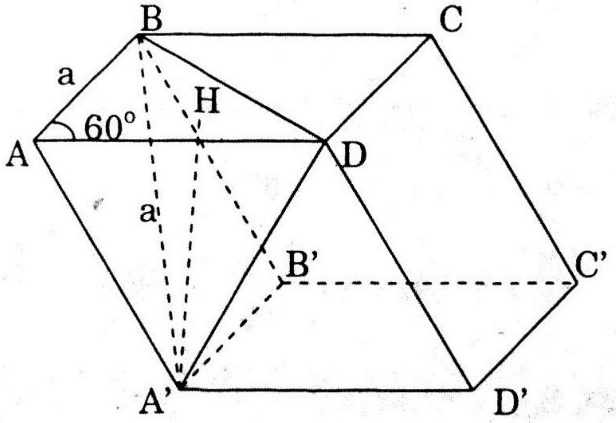
Ta có $V_{H'} = (a + 2)^3$; $V_H = a^3$

Theo gt: $V_{H'} - V_H = 98 \Leftrightarrow (a + 2)^3 - a^3 = 98$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 6a - 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -5 \text{ (loại do } a > 0) \end{array}\right.$$

Vậy a = 3cm, chọn đáp án (D)

20. Xét hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các mặt đều là hình thoi cạnh a và góc nhọn bằng 60°



Trong ΔABD, có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ (gt)

Và AB = AD (cùng bằng a) nên ΔABC đều cạnh a

⇒ BD = a, tương tự các đường chéo nhỏ của các mặt của hình hộp đều bằng a

A'D = A'B = BD = A'A = AB = AD = a

Hay A'.ABD là tứ diện đều cạnh a nên đường cao $A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Cách 1: $V = S_{\lozenge ABCD}.A'H = a^2.\sin 60^\circ\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. Chọn đáp án **(B)**

Cách 2: Dễ thấy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6.V_{A'ABD}$ ($S_{\lozenge ABCD} = 2S_{ABD}$ và công thức tính thể tích hình chóp, thể tích lăng trụ)

$= 6.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (thể tích tứ diện đều cạnh a là $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$)

$= \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

21. Khối 8 mặt đều có các đỉnh là tâm của các mặt của lập phương cạnh a có cạnh là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3}{6}$. Chọn đáp án **(D)**.

22. Khối 8 mặt đều mà các đỉnh là trung điểm các cạnh của khối tứ diện đều cạnh a có độ dài mỗi cạnh là $\frac{a}{2}$

Vậy V = $\left(\frac{a}{2}\right)^3\frac{\sqrt{2}}{3}$. V = $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. Chọn đáp án **(A)**

23. Chia khối 12 mặt đều H thành 12 hình chóp tam giác hình có đỉnh là M, bên trong H đáy là 1 mặt của H.

Gọi $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{12}$ là thể tích của 12 hình chóp tam giác trên,

$h_1, h_2, \ldots, h_{12}$ là chiều cao của chúng (khoảng cách từ M đến các mặt)

Ta có: $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_{12} = \frac{1}{3}(h_1 + h_2 + \ldots + h_{12}).S$

$\Rightarrow h_1 + h_2 + \ldots + h_{12} = \frac{3V}{S}$. Chọn đáp án **(C)**

24. $S_{\text{đáy}} = \sqrt{38(38-19)(38-20)(38-37)} = 114$

$h = \frac{1}{3}(19 + 20 + 37) = \frac{76}{3}$

$V = S_{\text{đáy}}.h = 114.\frac{76}{3} = 2888$. Chọn **(A)**

25. $S_{\text{đáy}} = 6^2.\sin 45^\circ = \frac{36\sqrt{2}}{2}\,\text{cm}^2$

$h = 10.\sin 45^\circ = 5\sqrt{2}\,\text{cm}$

$\Rightarrow V = S.h = 180\,\text{cm}^3$. Chọn **(B)**.

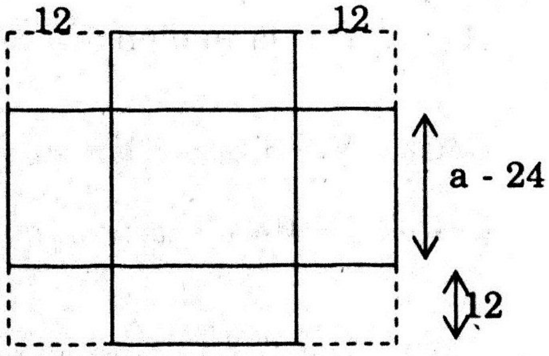
26. Khối hộp đó có các kích thước là:

(a – 24), (a – 24), 12 (cm)

(với a là độ dài tấm bìa)

$V = 12.(a-24)^2 \Leftrightarrow 4800 = 12.(a-24)^2$

$\Leftrightarrow a = 44$. Chọn **(C)**



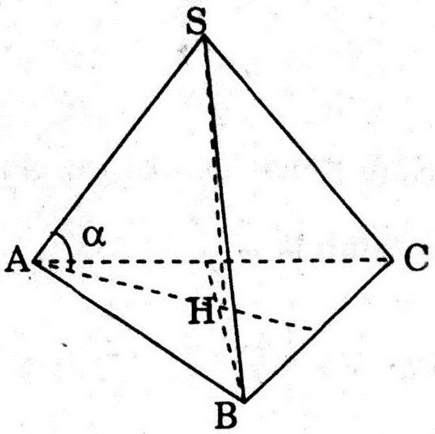
27. Xét chóp tam giác đều S.ABC, gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) $\Rightarrow \widehat{SAH} = \alpha$

$SH = AH.\tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3}\tan\alpha$

$S_{\text{đáy}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V = \frac{1}{3}.S_{\text{đáy}}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}\tan\alpha$

$V = \frac{a^3}{12}\tan\alpha$. Đáp án **(B)**



28. Xét hình chóp tam giác đều S.ABC. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC)

$SH = SA.\sin\alpha = b\sin\alpha$

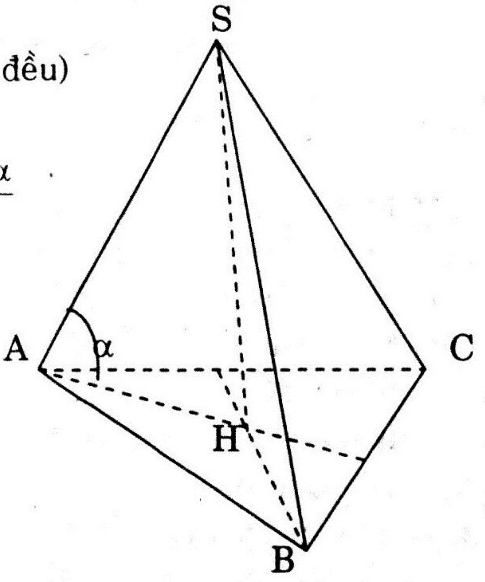
$AH = SA.\cos\alpha = b\cos\alpha$

Mà $AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AB = \dfrac{3b\cos\alpha}{\sqrt{3}}$ (do ΔABC đều)

$$S_{\Delta ABC} = AB^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{3b\cos\alpha}{\sqrt{3}}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9b^2.\cos^2\alpha}{4\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.b\sin\alpha\frac{9b^2.\cos^2\alpha}{4\sqrt{3}}$$

$V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2\cos^2\alpha\sin\alpha$. Chọn **(B)**.



29. Gọi a là độ dài cạnh đáy $\Rightarrow 4 = a^2 \Rightarrow a = 2$

O là hình chiếu của S trên (ABCD)

$\Rightarrow$ O là tâm của đáy

$V = \dfrac{1}{3}4.SO$ (*)

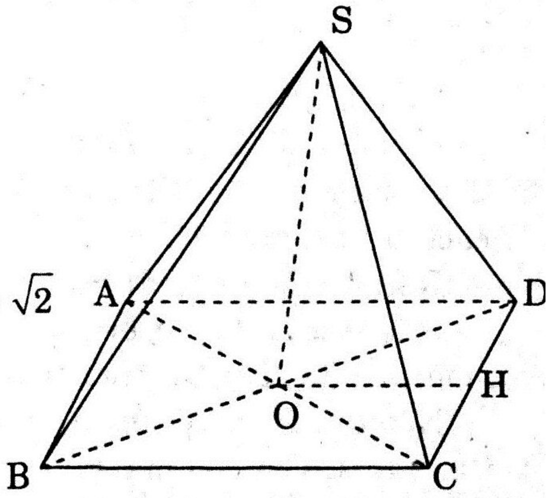
Với $SO = \sqrt{SH^2 - OH^2}$

Trong đó $OH = \dfrac{2}{2} = 1$

$$Q = S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}SH.a \Rightarrow SH = \frac{2Q}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Vậy $SO = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \dfrac{2^2}{4}} = 1$

$V = \dfrac{4}{3}$. Chọn đáp án **(C)**.



30. $S_{đáy} = \dfrac{1}{2}.6.8 = 24$

$h = 4.\sin60^\circ = 4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$V = \dfrac{1}{3}S_d.h = \dfrac{1}{3}.24.2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$. Chọn **(A)**.

31. $V = \dfrac{1}{3}h.S_{đáy}$

Khi mỗi cạnh tăng lên n lần thì $S_{đáy}$ tăng lên n^2 lần mà h tăng n lần. Vậy V tăng n^3 lần. Chọn **(C)**.

32. Khi mỗi cạnh giảm n lần thì $S_{đáy}$ giảm n^2 lần mà h tăng n lần. Vậy V giảm n lần. Chọn **(D)**.

CHƯƠNG II. MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

§1. Mặt cầu

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. • Mặt cầu S(O ; R) là tập hợp $\{M \backslash OM = R\}$
   - Khối cầu S(O ; R) là tập hợp $\{M \backslash OM \le R\}$
   - Mặt cầu là hình tròn xoay sinh bởi một đường tròn khi quay quanh một đường kính của đường tròn đó.
   - Khối cầu là hình tròn xoay sinh bởi một hình tròn khi quay quanh một đường kính của hình tròn đó.

2. Giao của mặt cầu S(O ; R) và mp (P) phụ thuộc vào R và khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (P). Giả sử H là hình chiếu của O lên (P) khi đó

– Nếu $d < R$ thì giao là đường tròn nằm trên (P) có tâm là H, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

– Nếu $d = R$ thì (P) tiếp xúc với mặt cầu tại H.

– Nếu $d > R$ thì (P) không có điểm chung với mặt cầu.

3. Giao của mặt cầu S(O ; R) với đường thẳng Δ phụ thuộc vào R và khoảng cách d từ tâm O đến Δ.

– Nếu $d < R$ thì Δ cắt S(O ; R) tại hai điểm phân biệt

– Nếu $d = R$ thì Δ tiếp xúc với S(O ; R) tại H. Các đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H nằm trên tiếp diện của mặt cầu tại H.

– Nếu $d > R$ thì Δ không có điểm chung với mặt cầu S(O ; R).

4. Các tiếp tuyến của mặt cầu đi qua điểm A nằm ngoài mặt cầu.

– Các đoạn thẳng nối A và các tiếp điểm bằng nhau.

– Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn.

5. Hình cầu bán kính R có diện tích $4\pi R^2$, và thể tích $\frac{4}{3}\pi R^3$.

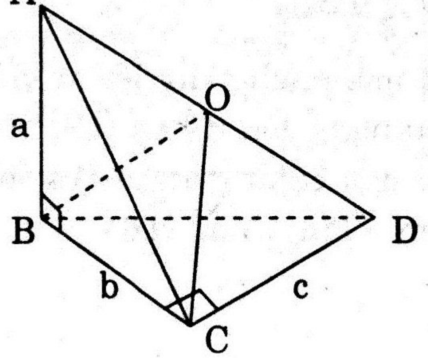
II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Trong không gian cho ba đoạn thẳng AB, BC, CD sao cho $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp AB$. Chứng minh rằng có mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Tính bán kính mặt cầu đó nếu $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

Giải

Vì $AB \perp BC$ và $AB \perp CD$ nên $AB \perp BD$

Tương tự ta có $DC \perp AC$.



Theo tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông ứng với cạnh huyền: $BO = CO = \frac{1}{2}AD$. Suy ra A, B, C, D nằm trên mặt cầu tâm O, bán kính: $R = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Tâm mặt cầu O là trung điểm AD.

Bài 2.

a) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua hai điểm phân biệt A, B cho trước.

b) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C đôi một phân biệt cho trước.

c) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua một đường tròn cho trước

d) Có hay không một mặt cầu đi qua một đường tròn và một điểm nằm ngoài mặt phẳng của đường tròn.

Giải

a) Gọi I là tâm mặt cầu đi qua hai điểm A, B cho trước, khi đó IA = IB. Vậy I nằm trên mặt phẳng trung trực của AB.

b) I là tâm mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt A, B, C cho trước khi và chỉ khi IA = IB = IC. Vậy:

+ Nếu ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì tập hợp các điểm I là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

+ Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng và đôi một phân biệt thì tập hợp I là rỗng.

c) I là tâm mặt cầu đi qua đường tròn (C) cho trước khi và chỉ khi I cách đều mọi điểm của đường tròn. Vậy tập hợp các điểm I là trục của đường tròn (C)

d) Gọi M là điểm nằm ngoài mặt phẳng của đường tròn (C). Lấy điểm A nằm trên (C) và gọi I là giao điểm của trục đường tròn và mặt phẳng trung trực của MA. Khi đó mặt cầu tâm I, bán kính R = IA = IM là mặt cầu đi qua đường tròn (C) và đi qua điểm M.

Bài 3. Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S). Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

a) Mọi mặt phẳng đi qua M đều cắt (S) theo một đường tròn.

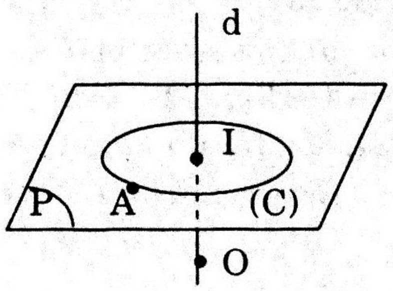
b) Mọi đường thẳng qua M đều cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn: Cả **a)** và **b)** đều đúng.

Bài 4. Cho đường thẳng d và điểm A không nằm trên d. Xét các mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên d. Chứng minh rằng các mặt cầu đó luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

Giải

Gọi S là mặt cầu đi qua điểm A có tâm O nằm trên d (Hình vẽ bên). Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d. Khi đó (P) cắt mặt cầu S theo giao tuyến là đường tròn (C), có tâm I là giao của mặt phẳng (P) với d, bán kính r = IA ⇒ (C) cố định



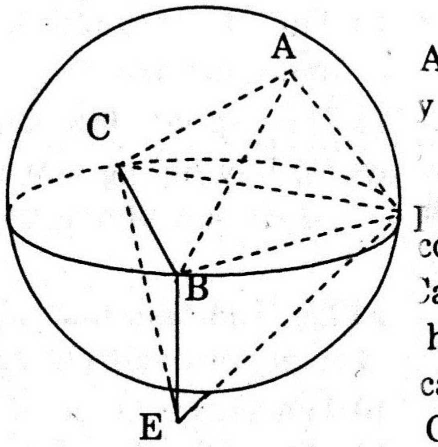
. òn cố định (C).

nào đúng ? lây, mệnh đề nào đúng ?

ì mọi mặt của nó là đa giác nếp mặt cầu thì mọi mặt của nó là đa giác nội

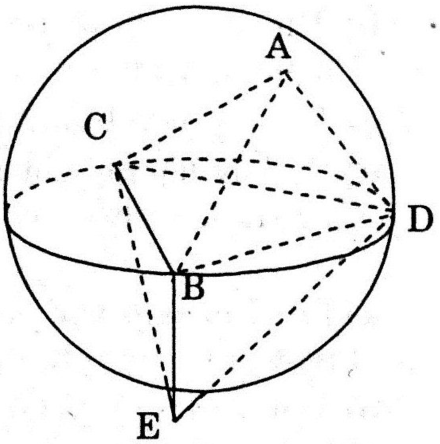
ıng tròn thì đa diện đó nội tiến nội tiếp đường tròn thì đa diện đó nội tiếp

Giải



p ABCD nội tiếp
n y điểm E nằm
) phẳng (BCD)

, có 6 mặt ABC,
u Các mặt đó đều
n hình đa diện
ó cầu. Vì nếu có
ó C, D, E thì nó
h t cầu đó chính
rên S.

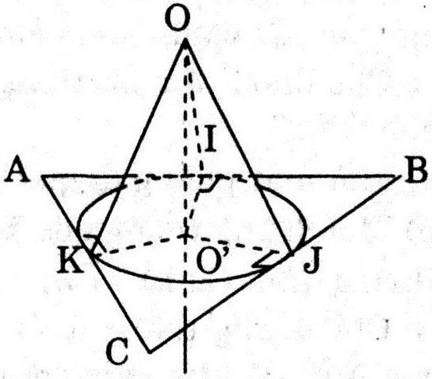


với ba cạnh của một tam giác t cầu tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác.

p xúc với sáu cạnh của hình tó mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của hình tứ

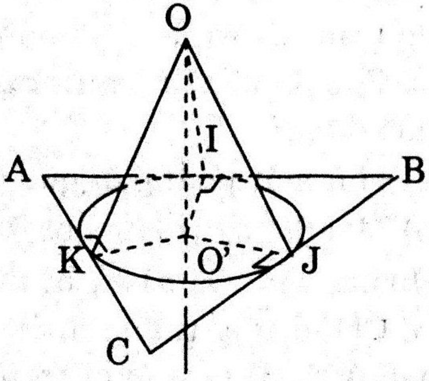
= AD + BC. D = AC + BD = AD + BC.

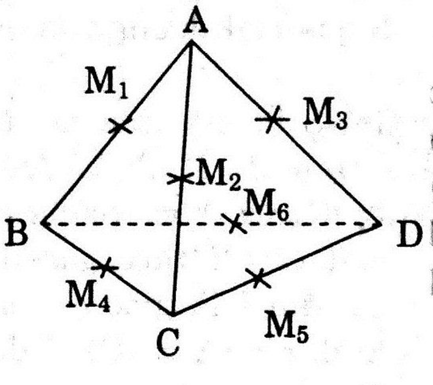
Giải



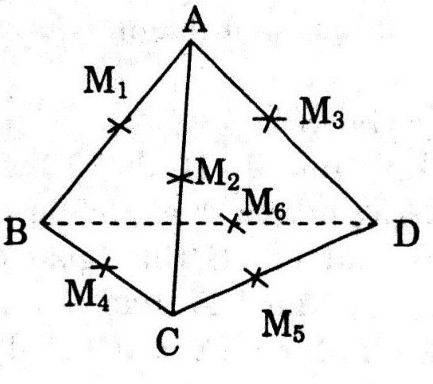
ầu tiếp xúc
ượt tại I, J,
3, OJ ⊥ BC,

lên mp (ABC)
O'K ⊥ AC, O'I
ờng tròn nội
tập hợp các
nội tiếp tam




A
M1
M3
M2
M6
B
D
M4
M5
C

úc với 6 cạnh
a M_1, M_2, M_3,
ó ta có
$BM_6 = BM_4$,
$DM_3 = DM_4$


A
M1
M3
M2
M6
B
D
M4
M5
C

Suy ra $AM_1 + BM_1 + CM_5 + DM_5 = AM_2 +$ $M_3 + BM_4 + CM_4$

$\Leftrightarrow AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

Đảo lại nếu tứ diện có tổng các cạnh đối bằ iếp xúc với các cạnh của tứ diện

ài 7.

a) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình bằng a và chiều cao h.

b) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có t Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm c Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, cầu và tính thể tích khối cầu đó.

Giải

a) Giả sử SH là đường cao của hình hóp đều S.ABC. Khi đó SA = SB = SC nên ọi điểm nằm trên SH cách đều A, B, C.

Trong mặt phẳng (SAH) đường trung rực của SA cắt SH tại O, thì O là tâm mặt ầu ngoại tiếp hình chóp, bán kính mặt cầu à R = SO.

Gọi I là trung điểm SA thì tứ giác AHOI nộ

$$SO.SH = SI.SA \text{ hay } SO = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{SA^2}{2h}$$

$$\text{Ta có: } SA^2 = SH^2 + AH^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{}$$

Suy ra $R = SO = \dfrac{a^2 + 3h^2}{6h}$. Vậy thể tích khố

b) Gọi SH là đường cao của hình chóp ều SABCD thì H là tâm hình vuông BCD và SH đi qua tâm H' của hình vuông 'B'C'D'. (Hình vẽ). Mọi điểm nằm trên SH ều cách đều bốn điểm A, B, C, D và cũng ách đều bốn điểm A', B', C', D'. Trên SH ác định điểm O sao cho OA = OA' thì O ách đều 8 đỉnh A, B, C, D, A', B', C', D' tức đỉnh đó nằm trên mặt cầu tâm O, bán ính R = OA. Điểm O là giao điểm của ường thẳng SH và mặt phẳng trung trực ủa đoạn AA'.

Suy ra $AM_1 + BM_1 + CM_5 +$ $_3 + BM_4 + CM_4$

$\Leftrightarrow AB + CD = AC + BD = AD$

Đảo lại nếu tứ diện có tổng c xúc với các cạnh của tứ diện

7.

a) Tính thể tích khối cầu ng bằng a và chiều cao h.

b) Cho hình chóp tứ giác đều Gọi A', B', C', D' lần lượt l Chứng minh rằng các điển cầu và tính thể tích khối c

a) Giả sử SH là đường cao p đều S.ABC. Khi đó SA = SE i điểm nằm trên SH cách đều

Trong mặt phẳng (SAH) đư c của SA cắt SH tại O, thì O l ngoại tiếp hình chóp, bán kí R = SO.

Gọi I là trung điểm SA thì tứ

$$SO.SH = SI.SA \text{ hay } SO = \frac{SA^2}{2SH}$$

$$\text{Ta có: } SA^2 = SH^2 + AH^2 = h^2$$

Suy ra $R = SO = \dfrac{a^2 + 3h^2}{6h}$. Vậ

b) Gọi SH là đường cao của SABCD thì H là tâm hì CD và SH đi qua tâm H' của 'C'D'. (Hình vẽ). Mọi điểm nằ cách đều bốn điểm A, B, C, h đều bốn điểm A', B', C', D' định điểm O sao cho OA = h đều 8 đỉnh A, B, C, D, A', B' đỉnh đó nằm trên mặt cầu t h R = OA. Điểm O là giao ờng thẳng SH và mặt phẳng đoạn AA'.

Do ΔSAC vuông cân tại S. Gọi I là trung điểm AA' thì ΔSIO cũng vuông cân tại I nên $OI = SI = \frac{3a}{4}$. Suy ra:

$$R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

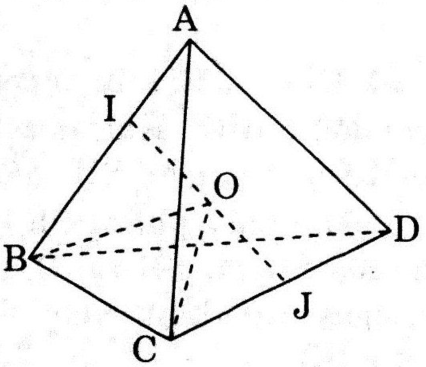
Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\pi a^3\sqrt{10}}{24}$

Bài 8. Cho tứ diện ABCD, với AB = CD = c, AC = BD = b, AD = BC = a.

a) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

b) Chứng minh rằng có một mặt cầu tiếp xúc với bốn mặt của tứ diện (nó được gọi là mặt cầu nội tiếp tứ diện).

Giải



a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$, $IJ \perp CD$

Gọi O là trung điểm IJ thì OA = OB và OC = OD

Do AB = CD = c nên hai tam giác vuông OIB và OJC bằng nhau nên OB = OC.

Vậy O cách đều 4 đỉnh A, B, C, D.

Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm O, bán kính R = OA.

Ta có $OA^2 = OI^2 + AI^2 = \frac{IJ^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = \frac{IJ^2 + c^2}{4}$

Vì CI là trung tuyến của tam giác ABC nên:

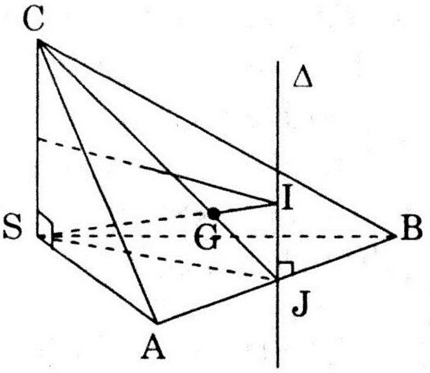
$CI^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$. Suy ra $IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$

Như vậy $R^2 = OA^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$ và diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là: $S = 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

b) Các mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau (đều có ba cạnh là a, b, c) nên các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đó có bán kính r bằng nhau. Các đường tròn đó đều nằm trên mặt cầu (O ; R) nên khoảng cách từ tâm O tới các mặt phẳng chứa các đường tròn đó bằng nhau và bằng $h = \sqrt{R^2 - r^2}$. Vậy mặt cầu tâm O bán kính h là mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD.

Bài 9. Tìm diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC biết SA = a, SB = b, SC = c và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Chứng minh rằng các điểm S, G, I thẳng hàng, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Giải



Gọi J là trung điểm của AB. Vì tam giác SAB vuông ở đỉnh S nên IS = JA = IB (Hình vẽ bên)

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (SAB) tại J thì mọi điểm của đường Δ đều cách đều ba điểm S, A, B. Bởi vậy nếu gọi I là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực của đoạn SC thì I cách đều bốn điểm S, A, B, C.

Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC có tâm I, bán kính R = IA.

Ta có: $R^2 = IA^2 = IJ^2 + AJ^2 = \left(\frac{SC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$

Diện tích mặt cầu bằng: $S = 4\pi R^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$

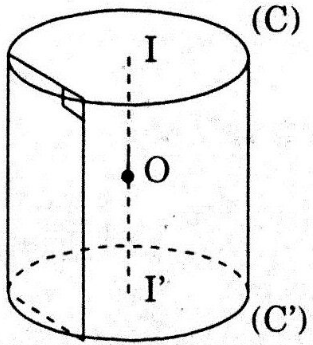
Vì SC // IJ nên SI cắt CJ tại điểm G và do SC = 2IJ nên CG = 2GJ. Do CJ là trung tuyến của tam giác ABC nên G là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 10.

a) Chứng minh rằng một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi nó là hình lăng trụ đứng và đáy là đa giác nội tiếp đường tròn.

b) Trong các hình hộp nội tiếp mặt cầu cho trước, hình hộp nào có diện tích toàn phần lớn nhất.

Giải



a) Nếu H là hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp thì các mặt bên là những hình bình hành có đường tròn ngoại tiếp nên phải là hình chữ nhật. Vậy H là hình lăng trụ đứng. Ngoài ra H có mặt cầu ngoại tiếp nên mặt đáy phải là đa giác có đường tròn ngoại tiếp.

Ngược lại cho H là lăng trụ đứng có các đường tròn (C) và (C') ngoại tiếp các đa giác đáy (Hình vẽ).

Gọi I, I' là tâm của (C) và (C') thì II' là trục của cả hai đường tròn. Gọi O là trung điểm II' thì O cách đều tất cả các đỉnh của hình lăng trụ đã cho. Vậy hình lăng trụ ấy có mặt cầu ngoại tiếp.

b) Nếu hình hộp H nội tiếp mặt cầu S(O ; R) thì các mặt của H phải là những hình chữ nhật, vậy H là hình hộp chữ nhật mà O là giao điểm các đường chéo, và độ dài đường chéo d = 2R

Gọi a, b, c là các kích thước của hình hộp chữ nhật đó thì $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 = 4R^2$. Gọi S là diện tích toàn phần của hình hộp thì ta có: $S = 2ab + 2bc + 2ac \leq 2(a^2 + b^2 + c^2) = 8R^2$. Vậy S đạt giá trị lớn nhất bằng $8R^2$ khi $a = b = c = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, tức là H là hình lập phương.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Hình nào sau đây luôn nội tiếp mặt cầu:

(A) Hình chóp đáy là tam giác; **(B)** Hình chóp đáy là tứ giác;
(C) Hình lăng trụ tam giác ; **(D)** Hình lăng trụ tứ giác.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông. Đường cao SA ⊥ (ABCD Khi đó tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là trung điểm của đoạ thẳng:

(A) AC ; **(B)** SB ; **(C)** SC; **(D)** SD.

3. Khối cầu có bán kính R = 2. Khi đó thể tích của nó bằng:

(A) 16π ; **(B)** $\frac{16\pi}{3}$; **(C)** $\frac{32\pi}{5}$; **(D)** $\frac{32\pi}{3}$.

4. Hình hộp chữ nhật có các kích thước 3 ; 4 ; 5. Khi đó bán kính mặt cầ ngoại tiếp hình hộp bằng:

(A) $5\sqrt{2}$; **(B)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; **(C)** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$; **(D)** $\frac{2}{5\sqrt{2}}$.

5. Một mặt phẳng chia thể tích hình cầu theo tỉ số $\frac{7}{20}$. Khi đó mặt phẳn đó chia diện tích mặt cầu theo tỉ số:

(A) $\frac{1}{2}$; **(B)** $\frac{1}{3}$; **(C)** $\frac{1}{4}$; **(D)** $\frac{7}{20}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	**(A)**	**(C)**	**(D)**	**(B)**	**(A)**

§2. Khái niệm mặt tròn xoay

§3. Mặt trụ, hình trụ và khối trụ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Trong không gian, cho hình $\mathcal{H}$ và đường Δ. Hình gồm các đường trò (C_M) với M thuộc $\mathcal{H}$ được gọi là hình tròn xoay sinh bởi $\mathcal{H}$ khi quay quan trục Δ. Đường thẳng Δ gọi là trục của hình tròn xoay đó. Khi hình $\mathcal{H}$ là mộ đường thì hình tròn xoay sinh bởi nó còn gọi là mặt tròn xoay

2. Mặt trụ là hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quan đường thẳng Δ song song với l.

Mặt trụ có trục Δ, bán kính R là tập hợp các điểm cách đường thẳng một khoảng R.

3. Hình trụ là phần mặt trụ nằm giữa hai mặt phẳng phân biệt (P (P’) vuông góc với trục của mặt trụ, cùng với hai hình tròn giới hạn bở hai đường tròn (C) và (C') là giao tuyến của mặt trụ với hai mặt phẳng (P) và (P').

Hình trụ là hình tròn xoay sinh bởi bốn cạnh của một hình chữ nhật khi quay quanh một đường trung bình của hình chữ nhật đó.

Diện tích xung quanh hình trụ $S = 2\pi R.h$
Diện tích toàn phần hình trụ $S = 2\pi.R.h + 2\pi R^2$ $\left\{\begin{array}{l} h : \text{chiều cao} \\ R : \text{bán kính đáy} \end{array}\right.$

4. Khối trụ là hình trụ cùng với phần bên trong hình trụ đó.

Khối trụ là hình tròn xoay sinh bởi một hình chữ nhật (kể cả các điểm nằm trong nó) khi quay quanh một đường trung bình của hình chữ nhật đó.

Thể tích khối trụ: $V = \pi.R^2h$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 11. Chứng minh rằng hình tròn xoay có vô số mặt phẳng đối xứng

Giải

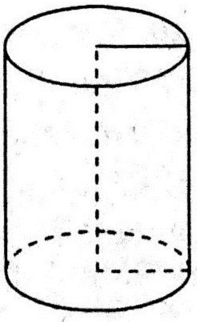
Giả sử $\mathcal{H}$ là hình tròn xoay có trục Δ. Lấy một điểm $M \in \mathcal{H}$ và gọi M' là điểm đối xứng của M qua Δ thì MM' là đường kính của đường tròn (C_M) nên $M' \in \mathcal{H}$. Từ đó suy ra Δ là trục đối xứng của $\mathcal{H}$. Mọi mặt phẳng (P) đi qua Δ đều là mặt phẳng đối xứng của $\mathcal{H}$. Thật vậy, nếu $M \in \mathcal{H}$ và M' đối xứng với Mqua mặt phẳng (P) thì M' cũng nằm trên đường tròn C_M nên $M' \in \mathcal{H}$.

Bài 12. Trong mỗi trường hợp sau, gọi tên các hình tròn xoay:

a) Sinh bởi ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư,

b) Sinh bởi một hình chữ nhật (kể cả điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh.

Giải



a) Hình sinh bởi ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư gọi là: hình trụ.

b) Hình sinh bởi một hình chữ nhật (kể cả điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh gọi là khối trụ.

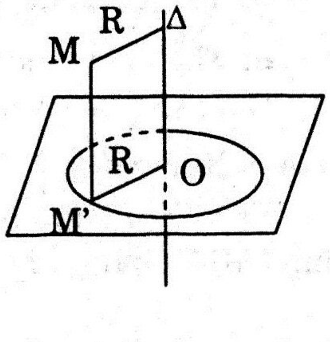
Bài 13. Cho đường tròn (O ; R) nằm trong mặt phẳng (P). Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho hình chiếu của chúng trên (P) luôn nằm trên đường tròn đã cho.

Giải

Gọi Δ là trục của đường tròn (O ; R)

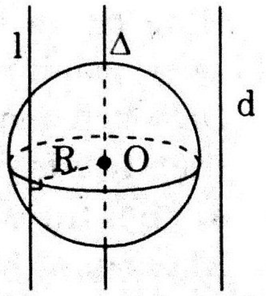
Nếu điểm M có hình chiếu M' nằm trên (O ; R) thì MM' // Δ và khoảng cách từ M' tới Δ bằng M'O = R

Vậy tập hợp các điểm M như thế là mặt trụ có trục là Δ và có bán kính bằng R.



Bài 14. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của một mặt cầu song song với một đường thẳng cố định nằm trên một mặt trụ xác định.

Giải



Cho mặt cầu S(O ; R) và đường thẳng d (Hình vẽ). Gọi Δ là đường thẳng đi qua O và song song với d. Giả sử l là tiếp tuyến của mặt cầu và l // d thì l // Δ và l cách Δ một khoảng không đổi R. Vậy l nằm trên mặt trụ có trục là Δ và có bán kính bằng R.

Bài 15. Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh 2R.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối trụ.

c) Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

Giải

Theo bài ra ta có hình trụ có bán kính đáy bằng R và đường sinh bằng 2R. Từ đó suy ra:

a) $S_{xq} = 2\pi R.2R = 4\pi R^2$

$S_{TP} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$

b) $V = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$.

c) Lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ là lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 2R và có đáy là hình vuông có cạnh $R\sqrt{2}$ nên có thể tích: $V_{LT} = 2R^2.2R = 4R^3$ (đvtt)

Bài 16. Một hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao $R\sqrt{3}$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối trụ giới hạn bởi hình trụ.

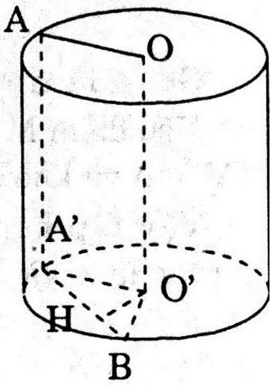
c) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.

Giải

a) Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$S_{TP} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\sqrt{3}\pi R^2 + 2\pi R^2 = 2(\sqrt{3}+1)\pi R^2$



b) Thể tích của khối trụ: $V_T = \pi R^2.R\sqrt{3} = \sqrt{3}\pi R^3$ (đvtt)

c) Theo giả thiết OA = O'B = R

Gọi AA' là đường sinh của hình trụ thì O'A' = R, $AA' = R\sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAA'} = 30^0$

Vì OO' // mp (ABA') nên khoảng cách giữa OO' và mp (ABA') bằng khoảng cách giữa OO' và AB.

Gọi H là trung điểm BA' thì khoảng cách đó bằng O'H.

Tam giác BA'A vuông tại A' nên $BA' = AA'\tan 30^0 = R\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = R$

Vậy BA'O' là tam giác đều, và do đó: $O'H = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Hình trụ là hình tròn xoay sinh bởi:

(A) Tam giác vuông quay quanh một cạnh;

(B) Tứ giác lồi quay quanh một cạnh;

(C) Hình chữ nhật quay quanh một cạnh;

(D) Hình thoi quay quanh một cạnh.

2. Hình trụ có bán kính R = 5, đường cao h = 7 khi đó diện tích toàn phần của hình trụ là:

(A) 120π ; **(B)** 50π ; **(C)** 49π ; **(D)** 70π.

3. Một mặt cầu có bán kính gấp 2 lần bán kính của một mặt trụ và đường cao của mặt trụ gấp bốn lần bán kính của một mặt cầu. Khi đó diện tích S_1 của mặt cầu và diện tích xung quanh S_2 của mặt trụ thỏa mãn:

(A) $S_1 < S_2$; **(B)** $S_1 = S_2$;

(C) $S_1 > S_2$; **(D)** Cả **(A)**, **(B)**, **(C)** đều sai.

4. Một hình trụ bán kính R và thiết diện qua trục là hình vuông. Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ:

(A) πR^2 ; **(B)** $2\pi R^2$; **(C)** $4\pi R^2$; **(D)** $6\pi R^2$.

5. Cho hai điểm A, B cố định. Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho diện tích tam giác MAB không đổi là:

(A) Một đường thẳng ; **(B)** Một đường tròn;

(C) Một mặt cầu ; **(D)** Một mặt trụ tròn xoay.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(A)	(B)	(C)	(D)

§4. Mặt nón, hình nón và khối nón

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mặt nón là hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ cắt l nhưng không vuông góc với l

Mặt nón đỉnh O, trục Δ (O thuộc Δ), góc ở đỉnh 2α là hình tạo bởi các đường thẳng đi qua O và tạo với Δ một góc bằng α ($0^0 < \alpha < 90^0$)

2. Hình nón là hình tròn xoay sinh bởi ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của tam giác đó.

Diện tích xung quanh của hình nón bằng nửa tích số chu vi đáy và độ dài đường sinh.

Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.

3. Khối nón là hình tròn xoay sinh bởi một hình tam giác vuông (kể cả phần trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

Thể tích của khối nón bằng một phần ba tích số diện tích đáy và chiều cao.

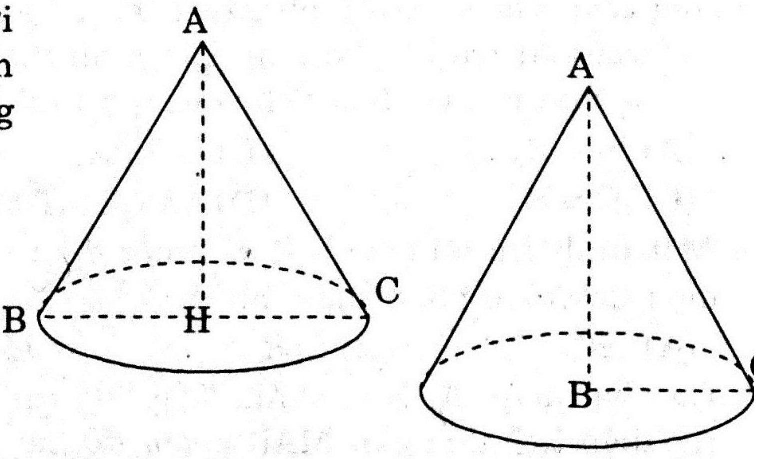
II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 17. Trong mỗi trường hợp sau, gọi tên hình tròn xoay:

a) Sinh bởi ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của tam giác đó.

b) Sinh bởi một tam giác vuông (kể cả điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

Giải



a) Hình tròn xoay sinh bởi ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của tam giác đó là hình nón.

b) Hình tròn xoay sinh bởi một tam giác (kể cả điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông gọi là khối nón.

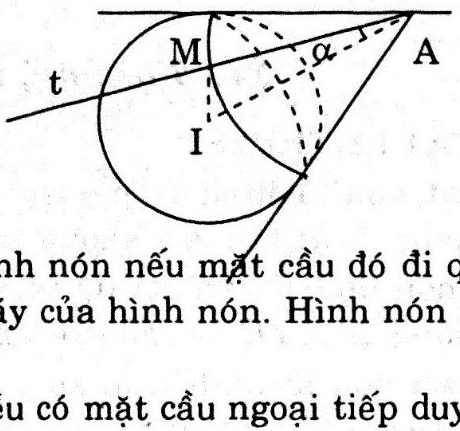
Bài 18. Cho điểm A nằm ngoài mặt cầu S. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A tiếp xúc với mặt cầu S luôn luôn nằm trên một mặt nón xác định

Giải

Giả sử At là một tiếp tuyến của mặt cầu S(I ; R) với tiếp điểm M

Khi đó gọi Δ là đường thẳng AI và α là góc hợp bởi đường thẳng At và Δ

thì $\alpha = \widehat{MAI}$ và do đó $\sin\alpha = \dfrac{MI}{IA} = \dfrac{R}{IA}$



Suy ra góc α không đổi.

Vậy At là đường sinh của mặt nón $\mathcal{N}$ có đỉnh A, trục Δ và góc ở đỉnh bằng 2α.

Bài 19. Một mặt cầu gọi là ngoại tiếp hình nón nếu mặt cầu đó đi qua đỉnh của hình nón và đi qua đường tròn đáy của hình nón. Hình nón như vậy gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

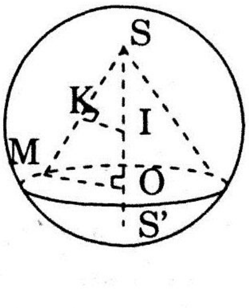
a) Chứng minh rằng mọi hình nón đều có mặt cầu ngoại tiếp duy nhất.

b) Một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy bằng r. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó.

c) Cho hình nón nội tiếp mặt cầu bán kính R. Nếu hình nón đó có chiều cao bằng h thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu ? Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

Giải

a) Giả sử hình nón $\mathcal{N}$ có đỉnh S và đường tròn đáy (O ; r) (Hình vẽ). Lấy điểm M bất kỳ trên (O ; r) thì tam giác SOM vuông ở O. Trong mặt phẳng (SOM) trung trực của đoạn thẳng SM cắt SO tại I. Khi đó ta có IS = IM. ngoài ra do I nằm trên trục của đường tròn (O ; r) nên I cách đều mọi điểm của đường tròn. Do I tồn tại duy nhất khi M thay đổi trên (O), suy ra một mặt cầu tâm I bán kính R = IS chính là mặt cầu duy nhất ngoại tiếp hình nón.



b) Gọi SS' là đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón (SS' > h)

Tam giác vuông SMS' vuông tại M, có đường cao OM.

$OM^2 = OS.OS' = h(SS' - h)$

Suy ra $SS' = \frac{r^2}{h} + h = \frac{r^2 + h^2}{h}$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$

c) Nếu hình nón có chiều cao h, bán kính đáy r, nội tiếp mặt cầu bán kính R thì $r^2 = h(2R - h)$

Vậy $r = \sqrt{h(2R - h)}$. Khi đó độ dài đường sinh là

$l = SM = \sqrt{SS'.SO} = \sqrt{2R.h}$. Từ đó suy ra:

$S_{xq} = \pi rl = \pi\sqrt{h(2R - h)}.\sqrt{2Rh} = \pi h.\sqrt{2R(2R - h)}$

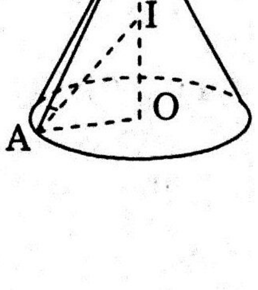
Bài 20. Một mặt cầu gọi là nội tiếp hình nón nếu nó tiếp xúc với mặt đáy của hình nón và tiếp xúc với mọi đường sinh của hình nón. Khi đó hình nón được gọi là ngoại tiếp mặt cầu.

a) Chứng minh rằng mọi hình nón đều có mặt cầu nội tiếp duy nhất.

b) Một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy bằng r. Hãy tính bán kính mặt cầu nội tiếp.

Giải

a) Giả sử hình nón đỉnh S và có đáy là đường tròn C(O ; R) (Hình vẽ). Lấy điểm A nào đó trên đường tròn và gọi I là điểm nằm trên SO sao cho AI là phân giác của góc $\widehat{SAO}$. Khi đó khoảng cách từ I tới mọi đường sinh của hình nón bằng nhau và bằng khoảng cách IO từ I tới mặt phẳng đáy. Suy ra mặt cầu tâm I bán kính r = IO chính là mặt cầu nội tiếp hình nón. Do I xác định duy nhất nên mặt cầu nội tiếp hình nón tồn tại duy nhất.

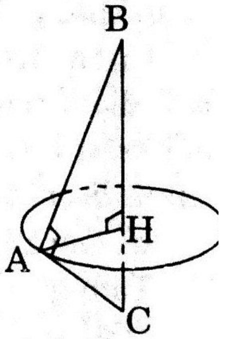


b) Ta có: $SA = \sqrt{OS^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + r^2}$. Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{IO}{IS} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow \frac{IO}{OI + IS} = \frac{OA}{OA + SA} \Rightarrow \frac{IO}{h} = \frac{r}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$

Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là: $R = IO = \frac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$

Bài 21. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AC = b. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng BC.

Giải



Gọi $\mathscr{H}$ là hình tạo bởi tam giác ABC (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng BC (Hình vẽ)

Nếu gọi AH là đường cao của tam giác ABC thì tam giác BAH và tam giác CAH khi quay quanh BC lần lượt tạo thành hai khối nón $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích hai khối nón đó ta có:

$$V_{\mathscr{H}} = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi AH^2.BH + \frac{1}{3}\pi AH^2.CH$$

$$= \frac{1}{3}\pi AH^2.BC = \frac{1}{3}\pi.\frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}.\sqrt{b^2 + c^2} = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Vậy $V_{\mathscr{H}} = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$ (đvtt)

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho mặt nón $\mathscr{N}$. Khi đó mặt phẳng (P) song song với một đường sinh thì giao tuyến của mặt nón $\mathscr{N}$ với mặt phẳng (P) là:

(A) Đường tròn ; **(B)** Đường Elip;

(C) Đường Hypecbol ; **(D)** Đường Parabol.

Câu 2. Mặt phẳng (P) đi qua trục của hình nón ($\mathscr{N}$), cắt hình nón theo giao tuyến là đường:

(A) Đường thẳng ; **(B)** Đường tròn ;

(C) Đường Elip ; **(D)** Tam giác can.

Câu 3. Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó là:

(A) $\sqrt{3}$; **(B)** $2\sqrt{3}$; **(C)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **(D)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4. Cho hình nón $\mathscr{N}$ sinh bởi một tam giác đều cạnh a. Khi quay quanh một đường cao. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của khối nón thì nó có bán kính là:

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; **(B)** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; **(C)** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; **(D)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5. Một hình nón có chiều cao 15a, bán kính đáy bằng 6a khi đó bán kính hình trụ có diện tích toàn phần lớn nhất nội tiếp hình nón là:

(A) $\frac{5a}{2}$; **(B)** 5a ; **(C)** $\frac{2}{5a}$; **(D)** $\frac{2a}{5}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	**(D)**	**(D)**	**(C)**	**(A)**	**(B)**

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA.

Câu 1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

a) Mặt cầu, khối cầu đều có vô số mặt phẳng đối xứng.

b) Mọi tứ diện luôn có cạnh bên bằng nhau đều có mặt cầu ngoại tiếp.

c) Mọi hình chóp có cạnh bên bằng nhau đều có mặt cầu ngoại tiếp.

d) Mọi hình hộp đứng đều có mặt cầu ngoại tiếp.

e) Mặt nón, hình nón, khối nón đều có vô số mặt phẳng đối xứng.

g) Mặt trụ, hình trụ, khối trụ đều có duy nhất một mặt phẳng đối xứng.

Hướng dẫn

Các câu đúng là a, b, c, e.

a) Đúng. Mỗi mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu, khối cầu đều là một mặt phẳng đối xứng của mặt cầu, khối cầu đó.

b) Đúng. Xét tứ diện ABCD, gọi trục của đường tròn ngoại tiếp ΔBCD là Δ, mặt phẳng trung trực của đoạn AC là (α) thì $I = \Delta \cap (\alpha)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

c) Đúng. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên của hình chóp.

d) Sai. chẳng hạn hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi ABCD với $\widehat{BAD} = 60^\circ$ trong trường hợp này nếu có mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' thì tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn – vô lí.

e) Đúng. Mỗi mặt phẳng đi qua trục của mặt nón đều là một mặt phẳng đối xứng của mặt nón, hình nón, khối nón tương ứng.

g) Sai. có vô số mặt phẳng đối xứng, mỗi mặt phẳng đi qua trục của mặt phẳng đối xứng của mặt trụ, hình trụ, khối trụ tương ứng.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

a) Mọi đường thẳng đều có chung với mặt trụ (hoặc mặt nón) nhiều nhất là hai điểm.

b) Mặt trụ và mặt nón có chứa các đường thẳng.

c) Mọi đường tròn lớn cũa mặt cầu đều đi qua hai điểm cố định.

d) Hai đường tròn phân biệt cùng nằm trên một mặt trụ có bán kính bằng nhau.

e) Hai đường tròn phân biệt cùng nằm trên một mặt nón có bán kính khác nhau.

Hướng dẫn.

Các câu đúng là b, d.

Hướng dẫn giải

a) Sai. Đường sinh nằm trọn trong mặt trụ (mặt nón)

b) Đúng. Mặt trụ, mặt nón đều chứa đường sinh của chúng.

c) Sai. Giả sử có hai điểm cố định A, B thuộc mặt cầu S (O; R). Xét mặt phẳng trung trực của AB, mặt phẳng này chứa một đường tròn lớn của S (O; R) mà đường tròn này không đi qua A và B.

d) Đúng. Vì đó là hai đường tròn đáy của một hình trụ.

e) Sai. Vì hai đường tròn như thế mà nằn trên hai mặt phẳng cách đều đỉnh của hình nón sẽ có bán kính bằng nhau.

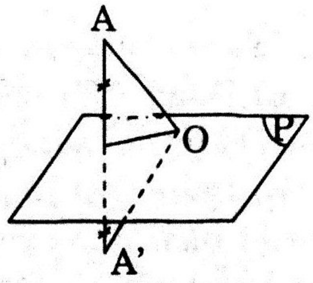
II. BÀI TẬP

Bài 1. Cho mp (P) và điểm A không thuộc mp (P). Chứng minh rằng mọi mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên (P) luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

Giải

Giả sử S là mặt cầu đi qua A và có tâm O ∈ (P) (Hình vẽ bên). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) thì OA' = OA nên mặt cầu S cũng đi qua A'.

Vậy các mặt cầu S đi qua hai điểm cố định A và A'.



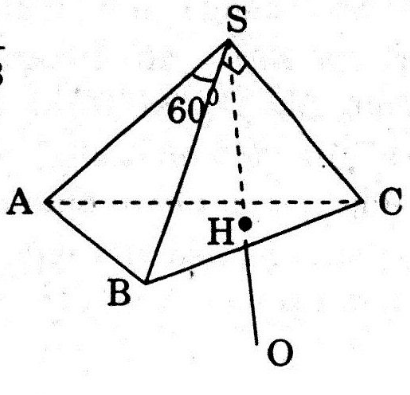
Bài 2. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC, biết SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 60^0$, $\widehat{BSC} = 90^0$, $\widehat{CSA} = 120^0$.

Giải

Theo (gt) $\Rightarrow$ AB = a, BC = $a\sqrt{2}$ và AC = $a\sqrt{3}$

Vậy ΔABC vuông tại B.

Gọi SH là đường cao của hình chóp thì do SA = SB = SC, nên HA = HB = HC, do đó H là trung điểm của AC. Gọi O là điểm đối xứng với điểm S qua điểm H.



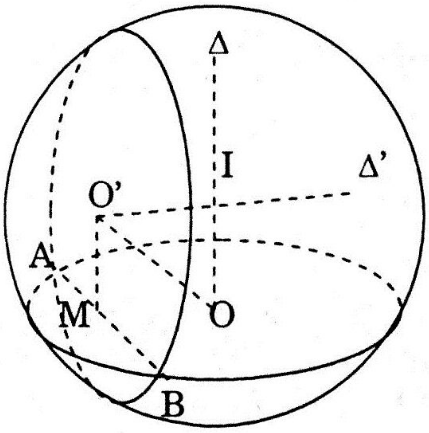
Khi đó OS = OA = OC = OB = a Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm O và có bán kính R = a.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O ; r) và (O' ; r') cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P').

a) Chứng minh rằng có mặt cầu (S) đi qua hai đường tròn đó.

b) Tính bán kính R của mặt cầu (S) khi r = 5, $r' = \sqrt{10}$, AB = 6, $OO' = \sqrt{21}$

Giải



a) Gọi M là trung điểm của AB thì OM ⊥ AB, O'M ⊥ AB. Do (P) và (P') phân biệt nên ba điểm O, M, O' không thẳng hàng.

Từ đó AB ⊥ mặt phẳng (OMO').

Gọi Δ và Δ' lần lượt là trục của đường tròn ((O ; r) và C'(O' ; r') thì Δ và Δ' cùng vuông góc với AB.

Từ đó suy ra Δ và Δ' cùng nằm trong mặt phẳng (OMO'). Δ và Δ' cắt nhau tại điểm I. Khi ấy mặt cầu ($\mathscr{E}$) có tâm I và bán kính R = IB là mặt cầu cần tìm.

b) Ta có: $MO^2 = OB^2 - MB^2 = r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow OM = 4$

Tương tự O'M = 1.

Xét ΔOMO' ta có: $OO'^2 = OM^2 + O'M^2 - 2OM.O'M.\cos(O\widehat{M}O')$

$\Leftrightarrow 21 = 16 + 1 - 2.4.1.\cos(O\widehat{M}O')$

$\Rightarrow \cos(O\widehat{M}O') = -\frac{1}{2}$. Từ đó $\widehat{OMO'} = 120^0$ và $\widehat{OIO'} = 60^0$

Tương tự $\cos\widehat{MO'O} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ do đó $\sin\widehat{OO'I} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Xét ΔOIO' ta có: $\frac{OI}{\sin\widehat{OO'I}} = \frac{OO'}{\sin\widehat{OIO'}} \Leftrightarrow \frac{OI}{\frac{\sqrt{21}}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow OI = 2\sqrt{3}$.

Như vậy $R^2 = IB^2 = OB^2 + OI^2 = 25 + 12 = 37$ tức là $R = \sqrt{37}$

Vậy $R = \sqrt{37}$.

Bài 4. Cho một hình nón $\mathscr{N}$ sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao.

a) Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón $\mathscr{N}$ thì có bán kính bằng bao nhiêu ?

b) Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón $\mathscr{N}$ thì có bán kính bằng bao nhiêu ?

Giải

Theo (gt) hình nón $\mathcal{N}$ có bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$, có chiều cao $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và có đường sinh $l = a$. Vậy nó có diện tích toàn phần là S_1 và V là thể tích

$$S_1 = \pi rl + \pi r^2 = \pi\frac{a^2}{2} + \pi\frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}\pi a^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$$

a) Nếu mặt cầu có bán kính R thì có diện tích là $S_2 = 4\pi R^2$

Theo bài ra $S_1 = S_2 \Leftrightarrow 4\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi a^2$ suy ra $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) Nếu mặt cầu bán kính R có thể tích bằng thể tích V của hình nón thì

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4}a$$

Bài 5. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, AB = c, AC = b, gọi V_1, V_2, V_3 là thể tích các khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi lần lượt quay quanh AB, AC, BC.

a) Tính V_1, V_2, V_3 theo b, c

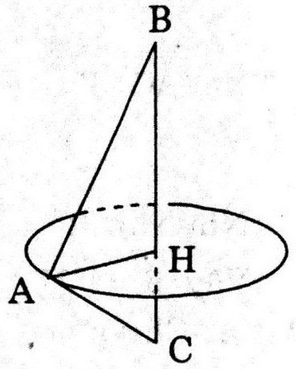
b) Chứng minh rằng $\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$

Giải

a) Khi quay tam giác ABC quanh AB ta được khối nón có đường cao c và bán kính đáy b, nên nó có thể tích: $V_1 = \frac{1}{3}\pi cb^2$

Khi quay tam giác quanh AC ta được khối nón có đường cao b và bán kính đáy là c, nên có thể tích: $V_2 = \frac{1}{3}\pi bc^2$.

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Khi quay tam giác ABC quanh BC (Hình vẽ) ta được khối tròn xoay hợp thành của hai khối nón sinh ra bởi tam giác ABH và ACH khi quay quanh BC.



Vì vậy:

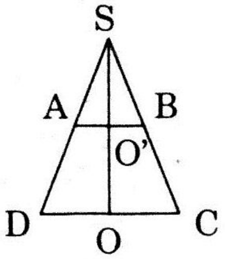
$$V_3 = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BH + \frac{1}{3}\pi.AH^2.CH = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BC$$

Vì $AH = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ và $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$ nên $V_3 = \frac{1}{3}\frac{\pi b^2c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

b) Ta có: $\frac{1}{V_3^2} = \frac{9(b^2 + c^2)}{\pi b^4c^4} = \frac{9b^2}{\pi^2b^4c^4} + \frac{9c^2}{\pi^2b^4c^4} = \left(\frac{3}{\pi c^2b}\right)^2 + \left(\frac{3}{\pi b^2c}\right)^2 = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$

Bài 6. Một hình thang cân ABCD có các cạnh đáy AB = 2a, DC = 4a. Cạnh bên AD = BC = 3a. Cho hình thang đó (kể cả điểm trong) quay quanh trục đối xứng của nó. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của khối tròn xoay được tạo thành.

Giải



Gọi S là giao điểm của hai cạnh bên AD và BC của hình thang (hình vẽ bên). Đường cao SO của tam giác cân SCD là trục đối xứng của hình thang do đó SO cắt AB tại trung điểm O' của AB.

Khi quay quanh SO, tam giác SCD sinh ra khối nón $\mathcal{N}_1$ có thể tích V_1, tam giác SAB sinh ra khối nón $\mathcal{N}_2$ có thể tích V_2 còn hình thang ABCD sinh ra một khối tròn xoay $\mathcal{H}$ có thể tích $V = V_1 - V_2$

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.OC^2.SO - \frac{1}{3}\pi.O'B^2.SO' = \frac{1}{3}4a^2.SO - \frac{1}{3}\pi a^2.SO' = \frac{1}{3}\pi a^2(4SO - SO')$

Chú ý rằng AB là đường trung bình của tam giác SCD nên SB = 3a và do đó:

$SO' = \sqrt{SB^2 - O'B^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$ và $SO = SO' = 4\sqrt{2}a$

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi a^2(16\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}a) = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của khối nón $\mathcal{N}_1$ và $\mathcal{N}_2$ thì diện tích xung quanh của khối tròn xoay $\mathcal{H}$ là $S_{xq} = S_1 - S_2 = \pi.OC.SC - \pi.O'B.SB = 9\pi a^2$

$\Rightarrow$ Diện tích toàn phần: $S_{TP} = 9\pi a^2 + \pi a^2 + 4\pi a^2 = 14\pi a^2$.

II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

A. ĐỀ BÀI

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Mọi hình hộp có mặt cầu ngoại tiếp;

(B) Mọi hình hộp đứng có mặt cầu ngoại tiếp;

(C) Mọi hình hộp có một mặt bên vuông góc với đáy đều có mặt cầu ngoại tiếp;

(D) Mọi hình hộp chữ nhật có mặt cầu ngoại tiếp.

2. Trong số các hình hộp nội tiếp một mặt cầu bán kính R thì:

(A) Hình hộp có đáy là hình vuông có thể tích lớn nhất;

(B) Hình lập phương có thể tích lớn nhất;

(C) Hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số cộng công sai khác 0 có thể tích lớn nhất;

(D) Hình hộp có các kích thuốc tạo thành cấp số nhân công bội khác 1 có thể tích lớn nhất.

3. Một hình cầu có thể tích $\frac{4}{3}\pi$ ngoại tiếp một hình lập phương. Trong các số sau đây, số nào là thể tích khối lập phương ?

(A) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$; **(B)** $\frac{8}{3}$; **(C)** 1 ; **(D)** $2\sqrt{3}$.

4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Hình chóp có đáy là tứ giác bất kì có mặt cầu ngoại tiếp;

(B) Hình chóp có đáy là hình thang vuông có mặt cầu ngoại tiếp;

(C) Hình chóp có đáy là hình bình hành có mặt cầu ngoại tiếp;

(D) Hình chóp có đáy là hình thang cân có mặt cầu ngoại tiếp.

5. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$ là

(A) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

(B) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$;

(C) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

(D) Đường tròn với tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

6. Bán kính mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều ABCD cạnh bằng a là

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; **(B)** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; **(C)** $a\sqrt{2}$; **(D)** $2a\sqrt{2}$.

7. Trong số các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn nằm trong hai mặ phẳng cắt nhau.

(B) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn nằm trong hai mặ phẳng song song.

(C) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn cắt nhau

(D) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn cắt nhau nằm tron hai mặt phẳng phân biệt.

8. Cho hai điểm A, B cố định. Tập hợp các điểm M trong không gian sa cho diện tích tam giác MAB không đổi là

(A) Hai đường thẳng song song **B)** Mặt cầu

(C) Mặt trụ tròn xoay **D)** Mặt nón tròn xoay.

9. Cho hai điểm phân biệt A, B cố định. Một đường thẳng l thay đổi luôn đi qua A và cách B một khoảng $\frac{AB}{2}$. Gọi H là hình chiếu của B trên l. Tập hợp điểm H trong không gian là

(A) Mặt phẳng ; **B)** Mặt trụ tròn xoay;

(C) Mặt nón ; **D)** Đường tròn.

10. Với điểm O cố định thuộc mặt phẳng (P) cho trước, xét đường thẳng l thay đổi đi qua O và tạo với (P) góc 30^0. Tập hợp các đường thẳng l trong không gian là:

(A) Mặt phẳng ; **B)** Hai đường thẳng ;

(C) Mặt trụ ; **(D)** Mặt nón.

11. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, đường cao $OO' = a\sqrt{3}$. Một đoạn thẳng AB thay đổi sao cho góc giữa AB và trục hình trụ bằng 30^0, A, B thuộc hai đường tròn đáy của hình trụ. Tập hợp trung điểm I của AB là:

(A) Mặt trụ ; **(B)** Mặt cầu ;

(C) Đường tròn có tâm là trung điểm của đường cao hình trụ, bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ trong mặt phẳng trung trực của OO'

(D) Mặt phẳng

12. Trong mặt phẳng (P) cho góc xOy. Một mặt phẳng (Q) thay đổi và vuông góc với đường phân giác trong của góc xOy, cắt Ox, Oy tại A, B. Trong (Q) lấy điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^0$. Khi ấy, điểm M luôn thuộc:

(A) Đường tròn ; **(B)** Mặt trụ ;

(C) Mặt nón ; **(D)** Mặt cầu.

13. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh a. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay sinh bởi đường chéo AC' khi quay quanh trục AA' bằng:

(A) $\pi a^2\sqrt{6}$; **(B)** $\pi a^2\sqrt{3}$; **(C)** $\pi a^2\sqrt{2}$; **(D)** $\pi a^2\sqrt{5}$.

14. Cho hình nón bán kính đáy bằng a. Một dây cung thay đổi của đường tròn đáy có độ dài không đổi bằng a. Tập hợp trung điểm I của dây cung là:

(A) Mặt nón cố định ; **(B)** Mặt phẳng cố định;

(C) Mặt trụ cố định ; **(D)** Đường tròn cố định.

15. Cho hình trụ có bán kính đáy R, đường cao OO'. Cắt hình trụ đó bằng mặt phẳng (α) vuông góc với đáy và cách điểm O một khoảng h cho trước (h < R). Khi ấy, mp (α) có tính chất:

(A) Luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định;

(B) Luôn cách mặt phẳng cho trước qua trục hình trụ một khoảng h;

(C) Cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông;

(D) Cả ba tính chất trên đều sai.

16. Một khối trụ có bán kính đáy $a\sqrt{3}$, chiều cao $2a\sqrt{3}$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối trụ là:

(A) $8\sqrt{6}\pi a^3$; **(B)** $6\sqrt{6}\pi a^3$; **(C)** $\frac{4}{3}\sqrt{6}\pi a^3$; **(D)** $4\sqrt{3}\pi a^3$.

17. Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó là:

(A) $\sqrt{3}$; **(B)** $2\sqrt{3}$; **(C)** $\frac{2\sqrt{3}}{2}$. ; **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

18. Cho hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón thì có bán kính là

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; **(B)** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; **(C)** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; **(D)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

19. Cho một hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón thì có bán kính bằng

(A) $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4}$; **(B)** $\frac{a\sqrt[3]{3}}{8}$; **(C)** $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{8}$; **(D)** $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{2}$.

20. Một hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 90^{o}. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (α) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (α) và mặt đáy hình nón bằng 60^{o}. Khi đó diện tích thiết diện là:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}a^2$; **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$; **(C)** $\frac{2}{3}a^2$; **(D)** $\frac{3}{2}a^2$.

21. Cho hình chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt đáy góc 60^0. Diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp hình chóp là

(A) $\frac{3\pi a^2}{2}$; **(B)** $\frac{3\pi a^2}{4}$; **(C)** $\frac{3\pi a^2}{6}$; **(D)** $\frac{3\pi a^2}{8}$.

22. Cho mặt cầu bán kính R và một hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao 2R. Tỉ số thể tích khối cầu và khối trụ là

(A) $\frac{2}{3}$; **(B)** $\frac{3}{2}$; **(C)** 2 ; **(D)** $\frac{1}{2}$.

23. Cho hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao cũng bằng R. Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, mp (ABCD) không vuông góc với mặt phẳng đáy hình trụ. Diện tích hình vuông đó là

(A) $\frac{5R^2}{2}$; **(B)** $5R^2$; **(C)** $\frac{5R^2\sqrt{2}}{2}$; **(D)** $5R^2\sqrt{2}$

24. Một khối hộp chữ nhật nội tiếp trong một khối trụ. Ba kích thước của khối hộp chữ nhật a, b, c. Thể tích của khối trụ là

(A) $\frac{1}{4}\pi(a^2+b^2)c$; (B) $\frac{1}{4}\pi(b^2+c^2)a$;

(C) $\frac{1}{4}\pi(c^2+a^2)b$; (D) $\frac{1}{4}\pi(a^2+b^2)c$ hoặc $\frac{1}{4}\pi(b^2+c^2)a$ hoặc $\frac{1}{4}\pi(c^2+a^2)b$

25. Một khối tứ diện đều có cạnh a nội tiếp một khối nón. Thể tích khối nón là

(A) $\frac{\sqrt{3}}{27}\pi a^3$; (B) $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi a^3$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$; (D) $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi a^3$

26. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh bằng 120^0. Trên đường tròn đáy, lấy một điểm A cố định và điểm M di động. Gọi s là diện tích của tam giác SAM. Có bao nhiêu vị trí của M để s đạt giá trị lớn nhất ?

(A) Có 1 vị trí ; (B) Có 2 vị trí ;

(C) Có 3 vị trí ; (D) Có vô số vị trí.

B. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Đáp án	**(D)**	**(B)**	**(A)**	**(D)**	**(B)**	**(A)**	**(D)**	**(C)**	**(C)**

Câu	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Đáp án	**(D)**	**(C)**	**(C)**	**(A)**	**(D)**	**(A)**	**(A)**	**(D)**	**(A)**

Câu	19	20	21	22	23	24	25	26	
Đáp án	**(A)**	**(A)**	**(A)**	**(A)**	**(A)**	**(D)**	**(B)**	**(B)**	

C. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. Vì hình hộp chữ nhật có hai đáy nội tiếp đường tròn nên có mặt cầu ngoại tiếp. Chọn **(D)**.

2. Gọi các cạnh của hình hộp chữ nhật là a, b, c

Khi đó V = abc lớn nhất khi và chỉ khi a = b = c

Vậy hình đó là hình lập phương. Chọn **(B)**

3. Gọi $V_{cầu}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi \Rightarrow R=1$

Mà $R=\frac{1}{2}a\sqrt{3} \Leftrightarrow a=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Suy ra thể tích hình lập phương. $V=a^3=\frac{8\sqrt{3}}{9}$. Chọn **(A)**

4. Hình chóp đáy là hình thang cân có mặt cầu ngoại tiếp. Vì đáy có đường tròn ngoại tiếp nên các điểm nằm trên trục đường tròn đều cách đều các đỉnh ở đáy. Mặt phẳng trung trực của một cạnh bên cắt trục đường tròn tại O thì O là tâm mặt cầu. Chọn **(D)**

5. Gọi G là trọng tâm của khối tứ diện ABCD

Khi đó $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$ tương tự MB^2, MC^2, MD^2

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + MD^2 = 4MG^2 + \frac{3}{2}a^2 = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{a^2}{8} \Rightarrow$$ M thuộc mặt cầu tâm G, bán kính $R = MG = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Chọn **(B)**

6. Do tứ diện ABCD là tứ diện đều nên tâm mặt cầu tiếp xúc các cạnh trùng với tâm mặt cầu ngoại tiếp nên $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Chọn **(A)**

7. (Xem bài 3a) phần bài tập ôn tập chương II). Chọn **(D)**

8. Gọi khoảng cách từ M đến AB là d(M, AB)

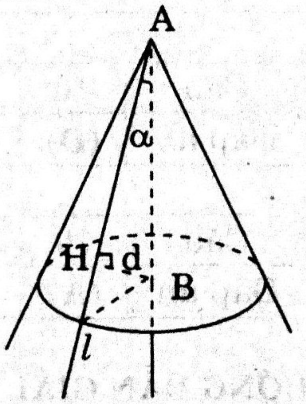
Ta có diện tích tam giác MAB là $S = \frac{1}{2}d(M, AB).AB \Rightarrow d(M, AB) = \frac{2S}{AB}$

Suy ra M thuộc mặt trụ $\mathcal{T}$ trục AB bán kính $R = \frac{2S}{AB}$. Chọn **(C)**

9. Đặt $\widehat{BAH} = \alpha$

Ta có BH = d

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{AB}{2}}{AB} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30^0$$



Vậy tập hợp H thuộc l là mặt nón $\mathcal{N}$ trục AB, đỉnh A, góc ở đỉnh 60^0. Chọn **(C)**

10. Mặt nón

Qua O kẻ đường thẳng Δ ⊥ mặt phẳng (P) thì góc giữa Δ và l là $\beta = 90 - 30^0 = 60^0$

Vậy đường thẳng l luôn tạo với Δ một góc không đổi và đi qua điểm cố định trên Δ nên l thuộc mặt nón $\mathcal{N}$ trục Δ đỉnh O và góc ở đỉnh bằng 2 $= 120^0$. Chọn **(D)**

11. Gọi giao điểm của AB với OO' là H. Do góc giữa AB và OO' bằng 30

Nên AB thay đổi thì I chạy trên đường tròn tâm K là trung điểm OO

bán kính $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ trong mặt phẳng trung trực OO'. Chọn **(C)**

12. Gọi Oz là tia phân giác góc xOy, I là trung điểm AB và $\alpha = \widehat{xOy}$. V

$\widehat{AMB} = 90^0$, nên $MI = \frac{AB}{2}$

Suy ra $\Delta MOI = \Delta BOI$. Do đó $\widehat{MOz} = \widehat{yOz} = \frac{\alpha}{2}$

Vậy M thuộc mặt nón $\mathcal{N}$ trục Oz, đỉnh O góc đỉnh α. Chọn **(C)**

13. AC' là đường sinh và $AC' = a\sqrt{3}$, bán kính đáy $A'C' = a\sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi Rl = \pi.a\sqrt{2}.a\sqrt{3} = \pi a^2\sqrt{6}$. Chọn **(A)**.

14. Gọi dây cung AB = a, I là trung điểm AB. Do dây cung có độ dài bằng a. Không đổi nên nó chuyển động trên đường tròn đáy thì trung điểm I cũng chạy trên đường tròn có bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Chọn **(D)**

15. Vì khoảng cách từ O đến (α) bằng h cố định và (α) ⊥ đáy nên (α) tiếp xúc với mặt trụ trục OO' bán kính h. Chọn **(A)**

16. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow R = a\sqrt{6}$. Suy ra

$V = \frac{4}{3}\pi.a^3.6\sqrt{6} = 8\pi a^3\sqrt{6}$. Chọn (A)

17. Do đường sinh bằng đường kính đáy nên bán kính mặt cầu: $R = \frac{2}{3}h$, với h là đường cao tam giác đều có cạnh bằng 2

$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ mà a = 2 $\Rightarrow R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Chọn **(D)**

18. Diện tích toàn phần hình nón

$S_{TP} = \pi Rl + S_{đáy} \Leftrightarrow S_{TP} = \pi.\frac{a}{2}.a + \pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{4}$

Diện tích hình cầu $S = 4\pi R^2 = S_{TP} \Leftrightarrow 4\pi R^2 = \frac{3\pi}{4}a^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Chọn **(A)**.

19. Vì $V_{nón} = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$

$V_{cầu} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Theo (gt): $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4}$. Chọn **(A)**

20. Chọn **(A)**

21. Chọn **(A)**

22. $V_{cầu} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_{trụ} = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$. Suy ra $\frac{V_{cầu}}{V_{trụ}} = \frac{2}{3}$. Chọn **(A)**

23. Tìm được $AB = R\sqrt{\frac{5}{2}}$ suy ra diện tích $\frac{5R^2}{2}$. Chọn **(A)**

24. Nếu đường cao là c thì thể tích $V = \frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2)c$

Nếu đường cao là b thì $V = \frac{1}{4}\pi(a^2 + c^2)b$

Nếu đường cao là a thì $V = \frac{1}{4}\pi(b^2 + c^2)a$. Chọn **(D).**

25. Khối nón có đường cao h bằng đường cao của tứ diện hạ từ một đỉnh đến mặt đối diện $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Bán kính đáy bằng $\frac{2}{3}$ đường cao tam giác đều, $R = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $V_{nón} = \frac{1}{3}\pi.R^2.h = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$. Chọn **(B).**

26. Gọi A' đối xứng với A qua tâm O của đường tròn đáy $\Rightarrow \widehat{ASA'} = 120^0$.

$S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}SA.SM.\sin(\widehat{ASM}) \leq \frac{1}{2}SA.SM =$ (không đổi)

Vậy diện tích nhỏ nhất khi $SA \perp SM \Rightarrow$ M nằm trên 2 nửa đường tròn (O) sao cho $SA \perp SM$. Và có 2 điểm M như vậy. Chọn **(B).**

CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. Hệ tọa độ trong không gian

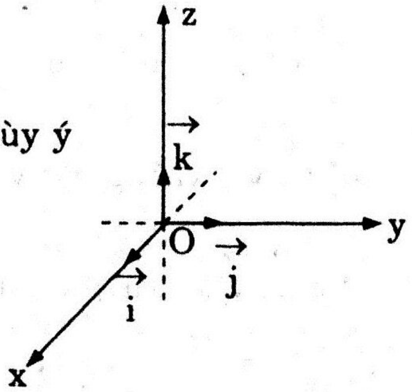
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ trục tọa độ Đềcác vuông góc Oxyz.

Là hệ trục tọa độ gồm 3 trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy 3 vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; với $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$;

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$.

2. Tọa độ của vectơ:



* Nếu $\vec{u} = x.\vec{i} + y\vec{j} + z.\vec{k}$ thì $\vec{u} = (x;y;z)$.

* Cho $\vec{u_1} = (x_1;y_1;z_1)$, $\vec{u_2} = (x_2;y_2;z_2)$ và số k tùy ý thì ta có:

1) $\vec{u_1} + \vec{u_2} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.

2) $\vec{u_1} - \vec{u_2} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

3) $\vec{u_1} = \vec{u_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

4) $k\vec{u_1} = (kx_1; ky_1; kz_1)$.

5) $\vec{u_1}.\vec{u_2} = \left|\vec{u_1}\right|.\left|\vec{u_2}\right|.\cos(\vec{u_1},\vec{u_2}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

6) $\left|\vec{u_1}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

7) $\cos(\vec{u_1},\vec{u_2}) = \dfrac{\vec{u_1}.\vec{u_2}}{\left|\vec{u_1}\right|.\left|\vec{u_2}\right|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$, với $\vec{u_1} \neq \vec{0}, \vec{u_2} \neq \vec{0}$.

8) $\vec{u_1} \perp \vec{u_2} \Leftrightarrow \vec{u_1}.\vec{u_2} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

3. Tọa độ của điểm:

* Nếu $\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$, với O là gốc tọa độ, thì M = (x; y; z).

* Cho $A = (x_A; y_A; z_A)$, $B = (x_B; y_B; z_B)$, ta có:

1) $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

2) $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

3) Tọa độ trung điểm đoạn AB là: $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

4. Tích có hướng của hai vectơ:

* Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$ là vectơ $\left[\vec{u}, \vec{v}\right]$ có tọa độ như sau:

$$\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right) = (bc' - cb'; ca' - ac'; ab' - ba')$$

* Tính chất của $\left[\vec{u}, \vec{v}\right]$:

+) $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

+) $\left[\vec{u}, \vec{v}\right]$ vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\vec{v}$, tức là $\left[\vec{u}, \vec{v}\right]\vec{u} = \left[\vec{u}, \vec{v}\right]\vec{v} = 0$.

+) $\left|\left[\vec{u}, \vec{v}\right]\right| = \left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v}\right| . \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

*) Ứng dụng của $\left[\vec{u}, \vec{v}\right]$.

+) Diện tích của hình bình hành ABCD là $S = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.

+) Diện tích của tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.

+) Thể tích của khối hộp ABCD.A'B'C'D' là $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] . \overrightarrow{AA'}\right|$.

+) Thể tích của khối tứ diện ABCD là $V = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] . \overrightarrow{AD}\right|$.

* Chú ý: +) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} . \vec{v} = 0$.

+) $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v} \Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \vec{0}$.

+) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{v}\right] . \vec{w} = 0$.

5. Phương trình mặt cầu:

+) Mặt cầu tâm $I(x_0;y_0;z_0)$, bán kính R có phương trình là: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

+) Phương trình: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2>d$ là phương trình của một mặt cầu có tâm $I(-a;\ -b;\ -c)$ và có bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Câu hỏi và bài tập

Bài 1. Trong hệ tọa độ $(0;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ cho các vectơ:

$\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$; $\vec{v}=3\vec{i}+5(\vec{j}-\vec{k})$; $\vec{w}=2\vec{i}-\vec{k}+3\vec{j}$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ đó.

b) Tìm côsin của các góc $(\vec{v},\vec{i})$, $(\vec{v},\vec{j})$ và $(\vec{v},\vec{k})$.

c) Tính các tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$.

Giải

a) Ta có $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ nên $\vec{u}=(1;-2;0)$.

$\vec{v}=3\vec{i}+5(\vec{j}-\vec{k})=3\vec{i}+5\vec{j}-5\vec{k}$ nên $\vec{v}=(3;5;-5)$.

$\vec{w}=2\vec{i}-\vec{k}+3\vec{j}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ nên $\vec{w}=(2;3;-1)$.

b) Ta có $\cos(\vec{v},\vec{i})=\dfrac{\vec{v}.\vec{i}}{|\vec{v}|.|\vec{i}|}$.

mà $\vec{v}=(3;5;-5)$, $\vec{i}=(1;0;0)$ nên $\vec{v}.\vec{i}=3$, $|\vec{v}|=\sqrt{9+25+25}=\sqrt{59}$, $|\vec{i}|=1$. Suy ra $\cos(\vec{v},\vec{i})=\dfrac{3}{\sqrt{59}}$.

Tương tự, ta có $\cos(\vec{v},\vec{j})=\dfrac{5}{\sqrt{59}}$; $\cos(\vec{v},\vec{k})=\dfrac{-5}{\sqrt{59}}$.

c) Theo câu a, ta có $\vec{u}=(1;-2;0)$; $\vec{v}=(3;5;-5)$; $\vec{w}=(2;3;-1)$ nên $\vec{u}.\vec{v}=-7$; $\vec{u}.\vec{w}=-4$; $\vec{v}.\vec{w}=26$.

Bài 2. Trong hệ tọa độ $(0;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ cho vectơ tùy ý $\vec{u}$ khác $\vec{0}$. Chứng minh rằng: $\cos^2(\vec{u},\vec{i})+\cos^2(\vec{u},\vec{j})+\cos^2(\vec{u},\vec{k})=1$.

Giải

Giả sử $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$, ta có:

$$\cos^2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i}) = \left(\frac{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{i}}{\left|\overrightarrow{u}\right| . \left|\overrightarrow{i}\right|}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2};$$

Tương tự, $\cos^2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{j}) = \dfrac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$; $\cos^2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k}) = \dfrac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Suy ra: $\cos^2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i}) + \cos^2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{j})\cos^2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k}) = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

Bài 3. Tìm góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{u} = (1; 1; 1)$; $\overrightarrow{v} = (2; 1; -1)$.

b) $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.

Giải

a) $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| . \left|\overrightarrow{v}\right|} = \dfrac{2 + 1 - 1}{\sqrt{1 + 1 + 1}.\sqrt{4 + 1 + 1}} = \dfrac{2}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Vậy góc giữa $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ là một góc thuộc khoảng $(0^0; 180^0)$ có cosin bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

b) Vì $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ nên $\overrightarrow{u} = (3; 4; 0)$.

Vì $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ nên $\overrightarrow{v} = (0; -2; 3)$.

Suy ra $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| . \left|\overrightarrow{v}\right|} = \dfrac{-8\sqrt{13}}{65}$.

Vậy góc giữa $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ là một góc thuộc khoảng $(0^0, 180^0)$ có cosin bằng $\dfrac{-8\sqrt{13}}{65}$.

Bài 4. Biết $\left|\overrightarrow{u}\right| = 2$; $\left|\overrightarrow{v}\right| = 5$, góc giữa $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ bằng $\dfrac{2\pi}{3}$. Tìm k để vectơ $\overrightarrow{p} = k\overrightarrow{u} + 17\overrightarrow{v}$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{q} = 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

Giải

Cách 1. Để $\overrightarrow{p}$ vuông góc với $\overrightarrow{q}$ thì $\overrightarrow{p} . \overrightarrow{q} = 0$

$\Leftrightarrow (k\vec{u} + 17\vec{v})(3\vec{u} - \vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow 3k.\vec{u}^2 - k.\vec{u}.\vec{v} + 51\vec{v}.\vec{u} - 17\vec{v}^2 = 0$

$\Leftrightarrow 12k + 5k - 255 - 17.25 = 0$ (vì $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -5$)

$\Leftrightarrow 17k = 680 \Leftrightarrow k = 40$. Vậy k = 40 là giá trị cần tìm.

Cách 2. Chọn 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bất kì thỏa mãn $|\vec{u}| = 2$; $|\vec{v}| = 5$ và $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$; chẳng hạn $\vec{u} = (2;0;0)$ và $\vec{v} = \left(\frac{-5}{2};\frac{5\sqrt{3}}{2};0\right)$

Khi đó, $\vec{p} = k\vec{u} + 17\vec{v} = \left(\frac{4k-85}{2};\frac{-85\sqrt{3}}{2};0\right)$. $\vec{q} = 3\vec{u} - \vec{v} = \left(\frac{17}{2};\frac{5\sqrt{3}}{2};0\right)$

Để $\vec{p}$ vuông góc với $\vec{q}$ thì $\vec{p}.\vec{q} = 0$ hay:

$\left(\frac{4k-85}{2}\right).\frac{17}{2} - \frac{85\sqrt{3}}{2}.\frac{5\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 40$. Vậy k = 40 là giá trị cần tìm.

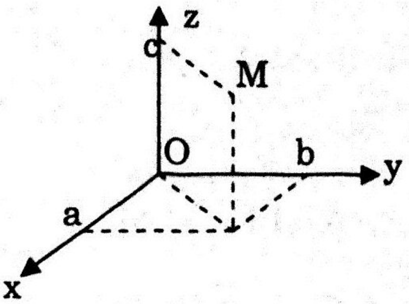
Bài 5. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm M = (a; b; c).

a) Tìm tọa độ hình chiếu (vuông góc) của M trên các mặt phẳng tọa độ và các trục tọa độ.

b) Tìm khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng tọa độ, đến các trục tọa độ.

c) Tìm tọa độ các điểm đối xứng với M qua các mặt phẳng tọa độ.

Giải



a) Hình chiếu của M lên mp(Oxy) có tọa độ là: (a; b; 0)

tương tự, hình chiếu của M lên mp(Oxz) và mp(Oyz) lần lượt có tọa độ là: (a; 0; c) và (0; b; c)

Hình chiếu của M lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt có tọa độ là: (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c).

b) Ta có $d(M,(Oxy)) = |c|$, $d(M,(Oxz)) = |b|$, $d(M,(Oyz)) = |a|$.

$d(M, Ox) = \sqrt{b^2 + c^2}$, $d(M, Oy) = \sqrt{a^2 + c^2}$, $d(M, Oz) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

c) Điểm đối xứng của M = (a; b; c) qua các mặt phẳng (Oxy), (Oxz) và (Oyz) lần lượt có tọa độ là:

(a; b; −c) ; (a; −b; c) và (−a; b; c).

Bài 6. Cho hai điểm $A(x_1;y_1;z_1)$ và $B(x_2;y_2;z_2)$. Tìm tọa độ điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$), k ≠ 1.

Giải

Giả sử M = (x; y; z), khi đó $\overrightarrow{MA} = (x_1 - x; y_1 - y; z_1 - z)$ và

$k\overrightarrow{MB} = \left(k(x_2 - x)\ ;\ k(y_2 - y)\ ;\ k(z_2 - z)\right)$.

Để $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ thì $\begin{cases} x_1 - x = k(x_2 - x) \\ y_1 - y = k(y_2 - y) \\ z_1 - z = k(z_2 - z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k} \\ z = \dfrac{z_1 - kz_2}{1 - k} \end{cases}$

Vậy $M = \left(\dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k}; \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k}; \dfrac{z_1 - kz_2}{1 - k}\right)$ với $k \neq 1$.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD; biết A(-3; −2; 0), B(3; −3; 1), C(5; 0; 2).

Tìm tọa độ đỉnh D và góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Giải

Gọi D = (x; y; z), để ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (x + 3; y + 2; z)$, $\overrightarrow{BC} = (2; 3; 1)$

Vậy $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 2 \\ y + 2 = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ hay D = (−1; 1; 1)

Khi đó, ta có $\overrightarrow{BD} = (-4; 4; 0)$ và $\overrightarrow{AC} = (8; 2; 2)$

Suy ra $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \dfrac{-32 + 8}{\sqrt{32}.\sqrt{72}} = \dfrac{-24}{48} = -\dfrac{1}{2}$

Vậy $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 120^0$.

Bài 8.

a) Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao cho M cách đều hai điểm A(1; 2; 3) và B(−3; −3; 2).

b) Cho ba điểm A(2; 0; 4), $B(4; \sqrt{3}; 5)$ và C(sin5t; cos3t; sin3t). Tìm t để AB vuông góc với OC (O là gốc tọa độ).

Giải

a) Gọi M = (a; 0; 0) thuộc Ox thỏa mãn MA = MB.

Ta có $MA^2 = (1 - a)^2 + 4 + 9 = a^2 - 2a + 14$,

$MB^2 = (3 + a)^2 + 9 + 4 = a^2 + 6a + 22$.

Để MA = MB thì $MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 14 = a^2 + 6a + 22 \Leftrightarrow a = -1$

Vậy M = (–1; 0; 0) là điểm cần tìm.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;\sqrt{3};1)$, $\overrightarrow{OC} = (\sin 5t;\cos 3t;\sin 3t)$;

Để AB ⊥ OC thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 2\sin 5t + \sqrt{3}\cos 3t + \sin 3t = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 5t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\sin 3t = 0 \Leftrightarrow \sin 5t + \sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right).\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-\pi}{24} + \frac{k\pi}{4} \\ t = \frac{2\pi}{3} + n.\pi \end{array}\right.$$

với $k, n \in \mathbb{Z}$.

Vậy $t = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$ và $t = \frac{2\pi}{3} + n.\pi$ với $k, n \in \mathbb{Z}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 9. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{u}(4;3;4)$; $\vec{v}(2;-1;2)$; $\vec{w}(1;2;1)$

b) $\vec{u}(1;-1;1)$; $\vec{v}(0;1;2)$; $\vec{w}(4;2;3)$

c) $\vec{u}(4;2;5)$; $\vec{v}(3;1;3)$; $\vec{w}(2;0;1)$

Giải

Để xét tính đồng phẳng của $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ ta xét $\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w}$

Nếu $\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w} = 0$ thì $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng.

a) Ta có $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (10;0;-10)$

nên $\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w} = 10.1 + 0.2 + (-10).1 = 0$

Vậy $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ đồng phẳng.

b) $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ không đồng phẳng.

c) $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ đồng phẳng.

Bài 10. Cho ba điểm A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1).

a) Chứng minh A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành.

c) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

d) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A.

e) Tính các góc của tam giác ABC.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;1)$, ta thấy $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng.

b) Gọi D = (x; y; z), ta có $\overrightarrow{AD}=(x-1;y;z)$, $\overrightarrow{BC}=(2;1;0)$. Để ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, hay $\begin{cases}x-1=2\\y=1\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\\z=0\end{cases}$, vậy D = (3; 1; 0)

c) Chu vi ΔABC là: $P = AB + BC + AC = \sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}$

Diện tích ΔABC là: $S=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|$

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}\right)=(-1;2;-1)$

Suy ra $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4+1}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (đơn vị diện tích)

d) Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AH.BC\Rightarrow AH=\dfrac{2.S_{\Delta ABC}}{BC}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

e) $\cos A=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=0\Rightarrow A=90^0$

$\cos B=\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}.\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

$\cos C=\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}.\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Bài 11. Cho bốn điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) và D(−2; 1; −2).

a) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b) Tính góc tạo bởi các cạnh đối của tứ diện đó. Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh A.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;0;1)$, $\overrightarrow{AD}=(-3;1;-2)$ nên ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;1)$, suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4\neq 0$. Vậy A, B, C, D không đồng phẳng, hay A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b) Ta có $\cos(AB, CD) = \left|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \dfrac{3}{\sqrt{2}.\sqrt{14}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$.

$$\cos(BC, AD) = \left|\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \dfrac{|-3|}{\sqrt{2}.\sqrt{14}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}.$$

$$\cos(AC, BD) = \left|\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|} = 0 \Rightarrow AC \perp BD.$$

Ta có: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

mà theo câu a, ta có $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -4$, nên $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}.4 = \dfrac{2}{3}$.

Mặt khác, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.AH.dt\Delta BCD \Rightarrow AH = \dfrac{3.V_{ABCD}}{dt\Delta BCD} = \dfrac{2}{dt\Delta BCD}$

mà $dt\Delta BCD = \dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{4+4+4} = \sqrt{3}$ (vì $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (2;-2;-2)$).

suy ra $AH = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bài 12. Cho hình chóp S.ABC có đường cao SA = h, đáy là tam giác ABC vuông tại C, AC = b, BC= a. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a) Tính độ dài MN.

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc với SB.

Giải

Cách 1. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: Gốc tọa độ O trùng với A, Ox là tia AC. Khi đó, ta có:

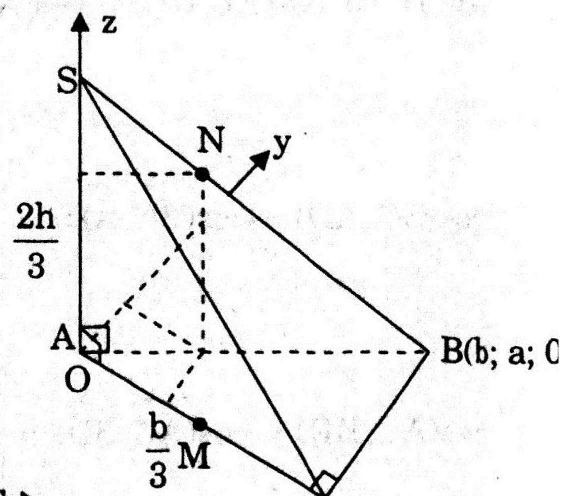
$A = (0; 0; 0)$, $B = (b; a; 0)$, $C = (b; 0; 0)$, $S = (0; 0; h)$ và

$N = \left(\dfrac{b}{3}; \dfrac{a}{3}; \dfrac{2h}{3}\right)$, $M = \left(\dfrac{b}{2}; 0; 0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{b}{6}; \dfrac{a}{3}; \dfrac{2h}{3}\right)$.

$\overrightarrow{SB} = (b; a; -h)$

a) Ta có $MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{\dfrac{b^2}{36} + \dfrac{a^2}{9} + \dfrac{4h^2}{9}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$.



b) Để $MN \perp SB$ thì $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0$

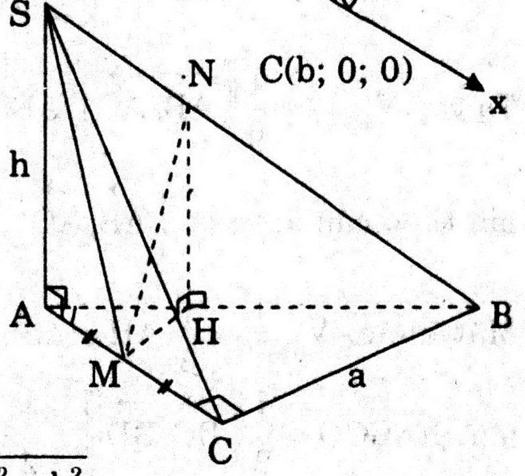
$$\Leftrightarrow -\frac{b^2}{6} + \frac{a^2}{3} - \frac{2h^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2$$

Cách 2.

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ N xuống AB, ta có NH // SA

$\Rightarrow NH \perp (ABC) \Rightarrow NH \perp MH$, hay ΔNHM vuông tại H, nên theo định lý pi-ta-go ta có:

$MN^2 = MH^2 + NH^2$ (1)



a) Vì $SN = \dfrac{1}{3}SB$

nên $NH = \dfrac{2}{3}SA = \dfrac{2}{3}h$

$\Rightarrow NH^2 = \dfrac{4h^2}{9}$ (*)

Trong ΔAMH, ta có:

$MH^2 = AM^2 + AH^2 - 2AM.AH.\cos A$ (định lí cosin)

mà $AM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{b}{2}$, $AH = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$,

$\cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, nên $MH^2 = \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^2+b^2}{9} - \dfrac{b^2}{3} = \dfrac{4a^2+b^2}{36}$ (**)

Thay (*) và (**) vào (1) ta được:

$$MN^2 = \frac{4a^2+b^2}{36} + \frac{4h^2}{9} = \frac{4a^2+b^2+16h^2}{36} \Rightarrow MN = \frac{1}{6}\sqrt{4a^2+b^2+16h^2}.$$

b) Để $MN \perp SB$ thì tam giác SNM phải vuông tại N, khi đó theo định lý pi-ta-go ta có: $SM^2 = SN^2 + MN^2$ (2)

Mà $MN^2 = \dfrac{4a^2+b^2+16h^2}{36}$ (***) (theo câu a)

và $SN = \dfrac{1}{3}SB = \dfrac{1}{3}\sqrt{SA^2+AB^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{SA^2+AC^2+BC^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{h^2+b^2+a^2}$

$\Rightarrow SN^2 = \dfrac{h^2+b^2+a^2}{9}$ (****)

Thay (***) và (****) vào (2) ta được:

$$SM^2 = \frac{h^2+a^2+b^2}{9} + \frac{4a^2+b^2+16h^2}{36} = \frac{20h^2+5b^2+8a^2}{36} \quad (3)$$

Mặt khác, trong ΔSAM ta có: $SM^2 = SA^2 + AM^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}$ (4)

So sánh (3) và (4) ta có: $\frac{20h^2 + 5b^2 + 8a^2}{36} = h^2 + \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2$

Bài 13. Tìm tọa độ tâm và bán kính mỗi mặt cầu sau đây:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 3y + 15z - 2 = 0$

c) $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$

Giải

a) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16$

nên mặt cầu có tâm là I(4; –1; 0) và bán kính R = 4.

b) Ta có: $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 3y + 15z - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y + 5z - \frac{2}{3} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{6}$

nên mặt cầu có tâm là $I = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{-5}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

c) Ta có: $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}x + 2y + \frac{1}{9} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$

nên mặt cầu có tâm là $I = \left(\frac{1}{3}; -1; 0\right)$ và bán kính R = 1.

Bài 14. Trong mỗi trường hợp sau, viết phương trình mặt cầu:

a) Đi qua ba điểm A(0; 8; 0), B(4; 6; 2), C(0; 12; 4) và có tâm nằm trên mp(Oyz).

b) Có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox.

c) Có tâm I(1; 2; 3) và tiếp xúc với mp(Oyz).

Giải

a) Vì tâm mặt cầu nằm trên mp(Oyz) nên ta gọi tâm mặt cầu là I = (0; b; c).

Vì mặt cầu đi qua A, B, C nên ta có hệ:

$$\begin{cases} AI = BI \\ BI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ BI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-8)^2 + c^2 = 16 + (b-6)^2 + (c-2)^2 \\ 16 + (b-6)^2 + (c-2)^2 = (b-12)^2 + (c-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b + c = 26 \\ -b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$.

b) Vì tâm mặt cầu nằm trên Ox nên ta gọi tâm mặt cầu là I(a; 0; 0). Vì mặt cầu tiếp xúc với (Oyz) nên bán kính $R = d\big(I,(Oyz)\big) = |a|$ theo bài ra ta có a = 2.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

c) Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm là I = (1; 2; 3) nên ta có bán kính mặt cầu là: $R = d\big(I,(Oyz)\big) = 1$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho điểm M = (2; −3; 1). Hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (yOz) có tọa độ là:

(A) (2; 0; 1); **(B)** (0; −3; 1); **(C)** (2; −3; 0); **(D)** (2; 0; 0)

2. Cho điểm M = (1; 2; 3). Khoảng cách từ M đến trục Oy là:

(A) $\sqrt{13}$; **(B)** $\sqrt{5}$; **(C)** $\sqrt{10}$; **(D)** 10.

3. Cho $\vec{u} = (1; -m; 2m)$ và $\vec{v} = (1+m; 1; -2)$. Giá trị m để $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$ là:

(A) 0; **(B)** $\frac{1}{2}$; **(C)** $\frac{1}{4}$; **(D)** mọi m.

4. Mặt cầu $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x - y - 1 = 0$ có bán kính là:

(A) $\frac{17}{6}$; **(B)** $\frac{17}{36}$; **(C)** $\frac{1}{3}$; **(D)** $\frac{\sqrt{17}}{6}$.

5. Cho đoạn thẳng AB = 4. Quỹ tích điểm M trong không gian thỏa mãn $MB = \frac{1}{2}MA$ là:

(A) Đường trung trực cạnh AB;

(B) Mặt phẳng trung trực cạnh AB;

(C) Một đường tròn có tâm nằm trên đoạn AB;

(D) Một mặt cầu có tâm nằm trên đường thẳng AB;

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(C)	(C)	(D)	(D)

§2. Phương trình mặt phẳng

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình mặt phẳng:

+) Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

trong đó $\vec{n} = (A;B;C)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

+) Nếu mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c) với abc ≠ 0 thì mặt phẳng có phương trình: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Đây gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

2. Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng:

Cho hai mặt phẳng có phương trình là:

(α): $Ax + By + Cz + D = 0$

(α'): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

Khi đó,

+) $(\alpha) \equiv (\alpha') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$.

+) $(\alpha) // (\alpha') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$.

+) (α) cắt $(\alpha') \Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$.

3. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d\left(M_0,(\alpha)\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 15.

Viết phương trình mặt phẳng trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua ba điểm M(2; 0; –1), N(1; –2; 3), P(0; 1; 2).

b) Đi qua hai điểm A(1; 1; –1), B(5; 2; 1) và song song với trục Oz.

c) Đi qua điểm (3; 2; –1) và song song với mặt phẳng có phương trình: $x - 5y + z = 0$.

d) Đi qua hai điểm A(0; 1; 1), B(–1; 0; 2) và vuông góc với mặt phẳng: $x - y + z + 1 = 0$

e) Đi qua điểm M(a; b; c) (abc ≠ 0) và song song với một mặt phẳng tọa độ.

g) Đi qua điểm G(1; 2; 3) và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC.

h) Đi qua điểm H(2; 1; 1) và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC.

Giải

a) Mặt phẳng (MNP) nhận vectơ $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]$ làm vectơ pháp tuyến. Ta có $\overrightarrow{MN}=(-1;-2;4)$, $\overrightarrow{MP}=(-2;1;3)$ nên $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(-10;-5;-5)$. Vậy mp(MNP) đi qua M(2; 0; –1) và có vectơ pháp tuyến là (–10; –5; –5) nên nó có phương trình: $-10(x-2)-5y-5(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-3=0$

b) Vì mặt phẳng đi qua AB và song song với Oz nên nó có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{k}\right]$, với $\overrightarrow{AB}=(4;1;2)$, $\vec{k}=(0;0;1)$ nên $\vec{n}=(1;-4;0)$.

Vậy mặt phẳng cần tìm đi qua A(1; 1; –1) và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-4;0)$ nên có phương trình là: $1(x-1)-4(y-1)+0(z+1)=0$

$\Leftrightarrow x-4y+3=0$

Cách khác:

Vì mặt phẳng cần tìm song song với Oz nếu có phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$, với $A^2+B^2\neq 0$.

Vì mặt phẳng này đi qua A(1; 1; –1) và B(5; 2; 1) nên ta có:

$$\begin{cases}A+B+D=0\\5A+2B+D=0\end{cases} \Rightarrow 4A+B=0, \text{ nếu } A=0 \text{ thì } B=0 \text{ (loại)}$$

Vậy $A\neq 0$, ta chọn $A=1 \Rightarrow B=-4$ và $D=3$

Vậy phương trình mặt phẳng là: $x-4y+3=0$

c) Vì mặt phẳng cần tìm song song với mp: $x-5y+z=0$ nên nó có phương trình dạng: $x-5y+z+D=0$, mà mặt phẳng này lại đi qua điểm (3; 2; –1) nên ta có:

$3-5.2+(-1)+D=0 \Leftrightarrow D=8$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $x-5y+z+8=0$

Cách khác:

Vì hai mặt phẳng song song với nhau thì có cùng vec tơ pháp tuyến, nên mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-5;1)$ nên nó có phương trình là: $1(x-3)-5(y-2)+1(z+1)=0 \Leftrightarrow x-5y+z+8=0$

d) Vì mặt phẳng cần tìm đi qua AB và vuông góc với mặt phẳng: $x-y+z+1=0$ nên nó có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_1\right]$, với $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)$ và $\vec{n}_1=(1;-1;1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng: $x-y+z+1=0$. Suy ra $\vec{n}=(0;2;2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $y+z-2=0$

e) Nếu mặt phẳng cần tìm song song với mp(Oxy) thì nó có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0;0;1)$, mặt khác mặt phẳng này đi qua điểm M(a; b; c) nên nó có phương trình là: $z - c = 0$.

Tương tự, nếu mặt phẳng cần tìm đi qua M(a; b; c) và song song với mp(Oxz) thì có phương trình: $y - b = 0$.

nếu mặt phẳng cần tìm đi qua Ms(a; b; c) và song song với mp(Oyz) thì có phương trình: $x - a = 0$.

g) Giả sử 3 giao điểm A, B, C của mặt phẳng với 3 trục tọa độ là A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c). Vì G(1; 2; 3) là trọng tâm của ΔABC nên ta có:

$\frac{a}{3} = 1$; $\frac{b}{3} = 2$; $\frac{c}{3} = 3$ suy ra $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$ nên ta có phương trình mp(ABC) theo đoạn chắn là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$.

h) Giả sử 3 giao điểm A, B, C của mp với 3 trục tọa độ là: A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c). Vì H(2; 1; 1) là trực tâm ΔABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0 \\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow b = c = 2a \neq 0$.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) viết theo đoạn chắn là:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{2a} = 1 \Leftrightarrow 2x + y + z = 2a$

Mặt khác, mặt phẳng này đi qua H(2; 1; 1) nên ta có:

$2.2 + 1 + 1 = 2a \Leftrightarrow a = 3$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x + y + z - 6 = 0$.

Bài 16. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp mặt phẳng cho bởi các phương trình sau:

a) $x + 2y - z + 5 = 0$ và $2x + 3y - 7z - 4 = 0$

b) $x - 2y + z - 3 = 0$ và $2x - y + 4z - 2 = 0$

c) $x + y + z - 1 = 0$ và $2x + 2y + 2z + 3 = 0$

d) $3x - 2y + 3z + 5 = 0$ và $9x - 6y - 9z - 5 = 0$

e) $x - y + 2z - 4 = 0$ và $10x - 10y + 20z - 40 = 0$.

Giải

a) Hai mặt phẳng cắt nhau, vì: $1 : 2 : (-1) \neq 2 : 3 : (-7)$.

b) Hai mặt phẳng cắt nhau, vì $1 : (-2) : 1 \neq 2 : (-1) : 4$.

c) Hai mặt phẳng song song, vì: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3}$.

d) Hai mặt phẳng cắt nhau, vì: $3 : (-2) : 3 \neq 9 : (-6) : (-9)$.

e) Hai mặt phẳng trùng nhau, vì: $\frac{1}{10} = \frac{-1}{-10} = \frac{2}{20} = \frac{-4}{-40}$.

Bài 17. Xác định giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây song song:

a) $2x + ny + 2z + 3 = 0$ và $mx + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $2x + y + mz - 2 = 0$ và $x + ny + 2z + 8 = 0$

Giải

a) Điều kiện để hai mặt phẳng đã cho song song với nhau là:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'} \Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{n}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{3}{7}$$

$\Leftrightarrow m = -4$ và $n = -1$.

b) Điều kiện để hai mặt phẳng đã cho song song với nhau là:

$$\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'} \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{1}{n} = \frac{m}{2} \neq \frac{-2}{8}$$

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{2}$ và $m = 4$.

Bài 18. Cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là:

$2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và $(m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0$

Với giá trị nào của m thì:

a) Hai mặt phẳng đó song song;

b) Hai mặt phẳng đó trùng nhau;

c) Hai mặt phẳng đó cắt nhau;

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc.

Giải

Các hệ số của phương trình mặt phẳng: $2x - my + 3z - 6 + m = 0$ là: $A = 2; B = -m; C = 3; D = m - 6$

Các hệ số của phương trình mặt phẳng: $(m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0$ là: $A' = m + 3$; $B' = -2$; $C' = 5m + 1$; $D' = -10$.

a) Để hai mặt phẳng song song thì: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} = \frac{3}{5m+1} \neq \frac{m-6}{-10} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{m+3} = \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} \\ \frac{3}{5m+1} \neq \frac{m-6}{-10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 4 = 0 \\ 5m^2 + m - 6 = 0 \\ 5m^2 - 29m + 24 \neq 0 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm, nên không có m để hai mặt phẳng đã cho song song.

b) Hai mặt phẳng trùng nhau $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} = \frac{3}{5m+1} = \frac{m-6}{-10}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 4 = 0 \\ 5m^2 + m - 6 = 0 \\ 5m^2 - 29m + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy m = 1 thì hai mặt phẳng đã cho trùng nhau.

c) Hai mặt phẳng cắt nhau khi và chỉ khi chúng không trùng nhau (vì theo câu a, hai mặt phẳng này không thể song song với nhau). Theo câu b, ta suy ra giá trị m để hai mặt phẳng cắt nhau là: $m \neq 1$.

Cách khác:

Để hai mặt phẳng cắt nhau thì: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'} \\ \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'} \\ \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{A}{A'} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{m+3} \neq \dfrac{-m}{-2} \\ \dfrac{-m}{-2} \neq \dfrac{3}{5m+1} \\ \dfrac{3}{5m+1} \neq \dfrac{2}{m+3} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m \neq 1$. Vậy điều kiện là $m \neq 1$.

d) Hai vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng lần lượt là: $\overrightarrow{n_1}(2;-m;3)$ và $\overrightarrow{n_2}(m+3;-2;5m+1)$.

Để hai mặt phẳng vuông góc thì $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$ hay $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$

$\Leftrightarrow 2(m+3) + 2m + 3(5m+1) = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-9}{19}$.

Vậy $m = -\dfrac{9}{19}$ là giá trị cần tìm.

Bài 19. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng (α) và (α') trong mỗi trường hợp sau:

a) (α): $2x - y + 4z + 5 = 0$, (α'): $3x + 5y - z - 1 = 0$.

b) (α): $2x + y - 2z - 1 = 0$, (α'): $6x - 3y + 2z - 2 = 0$.

c) (α): $x + 2y + z - 1 = 0$, (α'): $x + 2y + z + 5 = 0$

Giải

a) Gọi điểm M(x; y; z) là điểm cách đều (α) và (α'), khi đó:

$$d(M, \alpha) = d(M, \alpha') \Leftrightarrow \frac{|2x - y + 4z + 5|}{\sqrt{4+1+16}} = \frac{|3x + 5y - z - 1|}{\sqrt{9+25+1}}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}(2x - y + 4z + 5) = \pm\sqrt{3}(3x + 5y - z - 1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} + 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} + \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} + \sqrt{3} = 0 & (1) \\ (2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} - 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} - \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Vậy quỹ tích các điểm M cách đều hai mặt phẳng đã cho là hai mặt phẳng có phương trình (1) và (2).

b) Cách giải tương tự câu a, ta có tập hợp các điểm M cách đều hai mặt phẳng đã cho là hai mặt phẳng có phương trình sau: $-4x + 16y - 20z - 1 = 0$ và $32x - 2y - 8z - 13 = 0$.

c) Gọi M(x; y; z) là điểm cách đều (α) và (α'), ta có:

$$d(M, \alpha) = d(M, \alpha') \Leftrightarrow \frac{|x + 2y + z - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{|x + 2y + z + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow (x + 2y + z - 1) = \pm(x + 2y + z + 5)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y + z - 1 = x + 2y + z + 5 \\ x + 2y + z - 1 = -x - 2y - z - 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 = 5 \quad \text{(vô lý)} \\ x + 2y + z + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy quỹ tích điểm M cần tìm là mặt phẳng có phương trình $x + 2y + z + 2 = 0$

Bài 20. Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng:

$Ax + By + Cz + D = 0$ và $Ax + By + Cz + D' = 0$ với $D \neq D'$.

Giải

Ta nhận thấy hai mặt phẳng đã cho song song với nhau, nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng là khoảng cách từ 1 điểm M bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Giả sử điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng: $Ax + By + Cz + D = 0$ ta có khoảng cách cần tìm là:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-D + D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ (vì } Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D\text{)}$$

Bài 21. Tìm điểm M trên trục Oz trong mỗi trường hợp sau:

a) M cách đều điểm A(2; 3; 4) và mặt phẳng $2x + 3y + z - 17 = 0$

b) M cách đều hai mặt phẳng $x + y - z + 1 = 0$ và $x - y + z + 5 = 0$

Giải

Vì M nằm trên trục Oz nên có tọa độ dạng: M = (0; 0; c)

a) Ta có $MA = \sqrt{4 + 9 + (4 - c)^2} = \sqrt{13 + (4 - c)^2}$

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng: $2x + 3y + z - 17 = 0$ là:

$$h = \frac{|c - 17|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{|c - 17|}{\sqrt{14}}$$

Theo bài ra, ta có: $MA = h \Leftrightarrow MA^2 = h^2 \Leftrightarrow 13 + (4 - c)^2 = \frac{(c - 17)^2}{14}$

$\Leftrightarrow c = 3$. Vậy M = (0; 0; 3) là điểm cần tìm.

b) Vì M(0; 0; c) cách đều hai mp: $x + y - z + 1 = 0$ và $x - y + z + 5 = 0$ nên ta có:

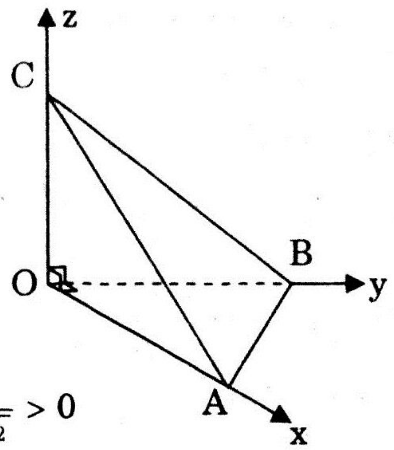
$$\frac{|-c + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|c + 5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow (-c + 1) = \pm (c + 5) \Leftrightarrow c = -2$$

Vậy M = (0; 0; –2) là điểm cần tìm.

Bài 22. Cho tứ diện OABC có các tam giác OAB, OBC, OCA là các tam giác vuông đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Bằng phương pháp tọa độ hãy chứng minh:

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn.

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.



Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: O = (0; 0; 0); A = (a; 0; 0); B = (0; b; 0); C = (0; 0; c).

a) Ta có

$\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$ nên

$$\cos\widehat{CAB} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+c^2}} > 0$$

suy ra góc $\widehat{CAB}$ nhọn.

Tương tự, ta có góc $\widehat{ACB}$ và $\overrightarrow{ABC}$ góc nhọn.

Vậy ΔABC có ba góc nhọn (đpcm).

b) Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (bc; ac; ab)$.

Các mặt phẳng (OBC), (OAC), (OAB) lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (1; 0; 0)$, $\overrightarrow{n_2} = (0; 1; 0)$; $\overrightarrow{n_3} = (0; 0; 1)$ nên ta có

$$\cos^2\alpha = \cos^2(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n}) = \frac{(bc)^2}{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}$$

$$\cos^2\beta = \cos^2(\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n}) = \frac{(ac)^2}{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}$$

$$\cos^2\gamma = \cos^2(\overrightarrow{n_3}, \overrightarrow{n}) = \frac{(ab)^2}{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}$$

Suy ra: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2} = 1$ (đpcm)

Bài 23. Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$

Giải

Mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ có tâm I(1; 2; 3); bán kính R = 4. Mặt phẳng cần tìm song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ nên có phương trình dạng: $4x + 3y - 12z + D = 0$ (α)

Vì mp(α) tiếp xúc với mặt cầu tâm I(1; 2; 3), bán kính R = 4 nên ta có: d(I, α) = R

$$\Leftrightarrow \frac{\left|4 + 6 - 36 + D\right|}{\sqrt{16 + 9 + 144}} = 4 \Leftrightarrow \left|-26 + D\right| = 52 \Rightarrow D = 78 \text{ hoặc } D = -26$$

Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $4x + 3y - 12z + 78 = 0$ hoặc: $4x + 3y - 12z - 26 = 0$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho hai mặt phẳng (α): $2x - y + z - 3 = 0$

(β): $4x - 2y + 2z + 3 = 0$

Vị trí tương đối giữa (α) và (β) là:

(A) Trùng nhau; **(B)** Song song; **(C)** Cắt nhau; **(D)** Vuông góc.

2. Khoảng cách từ M(m; –2m; –3) đến mặt phẳng: $2x + y + z - 3 = 0$ là:

(A) $\frac{|m|}{\sqrt{6}}$; **(B)** 0; **(C)** $\frac{3}{\sqrt{6}}$; **(D)** $\sqrt{6}$.

3. Mặt phẳng (α) đi qua A(–2; 1; 1) và B(1; 0; –1) đồng thời song song với CD với C(1; –1; 0), D(2; 1; 2) có phương trình là:

(A) $2x - 8y + 7z + 5 = 0$; **(B)** $2x - 8y + 5x + 7 = 0$;

(C) $2x + 8y + 7z + 5 = 0$; **(D)** $2x + 8y + 5z + 7 = 0$.

4. Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0$ có bán kính bằng:

(A) 1; **(B)** 3; **(C)** $\frac{3}{4}$; **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 1, tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2$ là:

(A) Tập rỗng;

(B) Mặt cầu có bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{4}$, có tâm O;

(C) Mặt cầu đi qua A, B, C, D;

(D) Mặt cầu có tâm là trọng tâm tứ diện ABCD và có bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	**(B)**	**(D)**	**(A)**	**(D)**	**(D)**

§3. *Phương trình đường thẳng*

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình của đường thẳng trong không gian.

a) Phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$

trong đó $M_0(x_0;y_0;z_0)$ là một điểm thuộc đường thẳng và vectơ $\overrightarrow{u}(a;b;c)\neq\overrightarrow{0}$ là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

b) Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$, với $abc\neq 0$

trong đó $M(x_0;y_0;z_0)$ là một điểm thuộc đường thẳng và $\overrightarrow{u}(a;b;c)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

c) Đường thẳng còn có thể xem là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau $Ax+By+Cz+D=0$ và $A'x+B'y+C'z+D'=0$ với $A:B:C\neq A':B':C'$

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Cho đường thẳng d đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}(a;b;c)$; đường thẳng d' đi qua $M'_0(x'_0;y'_0;z'_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}(a';b';c')$. Khi đó ta có:

+) d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\neq 0$

+) d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}=0\\ \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right]\neq\overrightarrow{0}\end{cases}$

+) d // d' $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u}\text{ và }\overrightarrow{u'}\text{ cùng phương}\\ M_0\notin d'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right]=\overrightarrow{0}\\ \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{M_0M'_0}\right]\neq\overrightarrow{0}\end{cases}$

+) d ≡ d' $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u}\text{ và }\overrightarrow{u'}\text{ cùng phương}\\ M_0\in d'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right]=\overrightarrow{0}\\ \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{M_0M'_0}\right]=\overrightarrow{0}\end{cases}$

3. Khoảng cách:

Cho đường thẳng d đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}(a;b;c)$ và d' đi qua $M'_0(x'_0;y'_0;z'_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}(a';b';c')$

+) Khoảng cách từ điểm M(x; y; z) đến đường thẳng d là:

$$MH=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{u}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}$$

+) Nếu d và d' chéo nhau, thì khoảng cách giữa d và d' là:

$$h = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\right|}$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 24. Viết phương trình (tham số và chính tắc) của các đường thẳng sau đây:

a) Các trục tọa độ Ox, Oy và Oz.

b) Các đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (với $x_0y_0z_0 \neq 0$) và song song với mỗi trục tọa độ.

c) Đường thẳng đi qua M(–2; 0; –1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1;3;5)$.

d) Đường thẳng đi qua N(2; 1; 2) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(0;0;-3)$.

e) Đường thẳng đi qua N(3; 2; 1) và vuông góc với mặt phẳng:

$$2x - 5y + 4 = 0$$

g) Đường thẳng đi qua hai điểm P(2; 3; –1) và Q(1; 2; 4).

Giải

a) Trục Ox là đường thẳng đi qua O(0; 0; 0) và nhận $\vec{i}(1;0;0)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Tương tự, trục Oy có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

trục Oz có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

b) Đường thẳng đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với trục Ox sẽ có vectơ chỉ phương là $\vec{i}(1;0;0)$ nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$

Tương tự ta có phương trình của đường thẳng đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với Oy là: $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 \end{cases}$

phương trình của đường thẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với Oz là

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t \end{cases}$$

c) Đường thẳng đi qua M(2; 0; –1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1; 3; 5)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{5}$

d) Đường thẳng đi qua N(–2; 1; 2) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(0; 0; -3)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

Đường thẳng này không có phương trình chính tắc.

e) Đường thẳng đi qua N(3; 2; 1) và vuông góc với mặt phẳng: $2x - 5y + 4 = 0$ nên nó nhận vectơ pháp tuyến của mặt phẳng này là $\vec{n}(2; -5; 0)$ làm vectơ chỉ phương, nên nó có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 \end{cases}$

Đường thẳng này không có phương trình chính tắc.

g) Đường thẳng đi qua P(2; 3; –1) và Q(1; 2; 4) sẽ nhận $\overrightarrow{PQ}(-1; -1; 5)$ làm vectơ chỉ phương, nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ và có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{5}$.

Bài 25. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của các đường thẳng sau đây:

a) Đường thẳng đi qua điểm (4; 3; 1) và song song với đường thẳng có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

b) Đường thẳng đi qua điểm (–2; 3; 1) và song song với đường thẳng có phương trình:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{3}$$

Giải

a) Vì hai đường thẳng song song có cùng vectơ chỉ phương nên đường thẳng cần tìm đi qua điểm (4; 3; 1) và nhận vectơ chỉ phương của đường thẳng đã cho là $\vec{u}=(2;-3;2)$ làm vectơ chỉ phương.

Vậy đường thẳng đó có phương trình tham số là $\begin{cases}x=4+2t\\y=3-3t\\z=1+2t\end{cases}$

và có phương trình chính tắc là: $\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{2}$.

b) Tương tự câu a, ta có đường thẳng đi qua (–2; 3; 1) và song song với đường thẳng: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{3}$ có phương trình tham số là $\begin{cases}x=-2+2t\\y=3+t\\z=1+3t\end{cases}$

và có phương trình chính tắc là: $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{3}$.

Bài 26. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d): $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$ trên mỗi mặt phẳng tọa độ.

Giải

Cách 1.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và (P) vuông góc với mp(Oxy). Khi đó hình chiếu vuông góc của d lên mp(Oxy) chính là giao tuyến của (P) với mp(Oxy).

mp(P) đi qua $M_0(1;-2;3)\in d$ và nhận $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{k}\right]$ làm vectơ pháp tuyến, với $\vec{u}(2;3;1)$ là vectơ chỉ phương của d và $\vec{k}=(0;0;1)$ là vectơ pháp tuyến của mp(Oxy), từ đó ta tính được $\vec{n}=(3;-2;0)$.

Vậy phương trình của (P) là: $3(x-1)-2(y+2)=0\Leftrightarrow 3x-2y-7=0$

mà mp(Oxy) có phương trình là: z = 0 nên phương trình hình chiếu của (d) lên mp(Oxy) là: $\begin{cases}3x-2y-7=0\\z=0\end{cases}$

Cách 2. Đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$ đi qua điểm $M_0=(1;-2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;1)$. Nếu chiếu vuông góc lên mp(Oxy) thì ta có:

Điểm $M_0=(1;-2;3)$ biến thành điểm $M_1=(1;-2;0)$

vectơ $\vec{u}(2;3;1)$ biến thành vectơ $\vec{u_1}(2;3;0)$

nên hình chiếu của d lên mp(Oxy) có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$$

Tương tự, hình chiếu của d lên mp(Oxz) có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

hình chiếu của d lên mp(Oyz) có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Bài 27. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 7 = 0$

a) Tìm một vectơ chỉ phương của d và một điểm nằm trên d.

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P).

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mp(P).

Giải

a) Đường thẳng d đi qua $M_0(0;8;3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;4;2)$.

b) Mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P) là mặt phẳng đi qua $M_0(0;8;3) \in$ d và nhận $\vec{n} = \left[\vec{u}, \vec{n_1}\right]$ làm vectơ pháp tuyến, trong đó $\vec{u} = (1;4;2)$ là chỉ phương của d, $\vec{n_1} = (1;1;1)$ là vectơ pháp tuyến của (P) ta tính được $\vec{n} = (2;1;-3)$, nên mặt phẳng cần tìm có phương trình là:

$$2(x - 0) + (y - 8) - 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3z + 1 = 0$$

c) Hình chiếu vuông góc của d lên mp(P) là giao tuyến của mp(P) và mp(Q) chứa d và vuông góc với mp(P). Theo câu b, ta có mp(Q) có phương trình: $2x + y - 3z + 1 = 0$. Vậy phương trình hình chiếu của d lên mp(P) là:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ x + y + z - 7 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t \end{cases}$$

Bài 28. Xác định vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng d và d' cho bởi phương trình:

a) d: $\frac{x-1}{2} = y - 7 = \frac{z-3}{4}$;   d': $\frac{x-3}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$

b) d: $\begin{cases} x = t \\ y = -3 - 4t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

d': là giao tuyến của hai mặt phẳng: $(\alpha): x + y - z = 0,$

$(\alpha'): 2x - y + 2z = 0.$

Giải

a) Đường thẳng (d) đi qua $M_0(1;7;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;4)$

đường thẳng (d') đi qua $M'_0(3;-1;-2)$ và có vectơ chỉ phương

$\vec{u'} = (6;-2;1)$

Nên ta tính được $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0} = -108 \neq 0$.

Vậy d và d' chéo nhau.

b) Thay x, y, z ở phương trình tham số của d vào phương trình (α) ta được: $t - 3 - 4t + 3 + 3t = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng với ∀t)

Vậy $d \subset (\alpha)$ (1)

Thay x, y, z ở phương trình tham số của d vào phương trình (α') ta được:

$2t + 3 + 4t - 6 - 6t = 0 \Leftrightarrow -3 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy d // (α')   (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: d // d'.

Cách khác:

Vì $d' = (\alpha) \cap (\alpha')$ nên ta tìm được điểm $M'_0(0;0;0) \in d'$ và $\vec{u'} = (1;-4;-3)$ là một vectơ chỉ phương của d'.

Đường thẳng d đi qua $M_0(0;-3;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-4;-3)$

nên ta có: $\begin{cases} \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M'_0}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$ suy ra d // d'

Bài 29. Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1; −1; 1) và cắt cả hai đường thẳng sau đây:

d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$;   d': $\begin{cases} x = t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$

Giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, ta có $\Delta = (P) \cap (Q)$; trong đó (P) chứa A và d và (Q) chứa A và d'. Đường thẳng d đi qua $M_0(1;0;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;-1)$ nên mp(P) đi qua A(1; –1; 1) và nhận $\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0A}\right] = (-3;4;-2)$ làm vectơ pháp tuyến, suy ra mp(P) có phương trình:

$$-3x + 4y - 2z + 9 = 0$$

Tương tự mp(Q) có phương trình: $x + y + z - 1 = 0$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} -3x + 4y - 2z + 9 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 7t \end{cases}$

Bài 30. Viết phương trình đường thẳng song song với d_1, và cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3, biết phương trình của d_1, d_2 và d_3 là:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}; \quad d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3}; \quad d_3: \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t' \end{cases}$$

Giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, thì $\Delta = (P) \cap (Q)$;
trong đó (P) là mặt phẳng chứa d_2 và (P) // d_1,
(Q) là mặt phẳng chứa d_3 và (Q) // d_1.

d_1, d_2, d_3 lần lượt có các vectơ chỉ phương là: $\vec{u_1} = (0;4;-1)$, $\vec{u_2} = (1;4;3)$, $\vec{u_3} = (5;9;1)$

Ta viết được phương trình mp(P) là: $16x - y - 4z - 10 = 0$
phương trình mp(Q) là: $13x - 5y - 20z + 17 = 0$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} 16x - y - 4z - 10 = 0 \\ 13x - 5y - 20z + 17 = 0 \end{cases}$

hay Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Bài 31. Cho hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = 8 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases} \text{ và } d_2: \frac{3-x}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O và song song với d_1 và d_2.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

d) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Giải

a) Đường thẳng (d_1) đi qua $M_1(8;\ 5;\ 8)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1;2;-1)$;

Đường thẳng (d_2) đi qua $M_2(3;\ 1;\ 1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-7;2;3)$

Ta có $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = (8;4;16)$; $\overrightarrow{M_2M_1} = (5;4;7)$ nên $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1} = 168 \neq 0$, suy ra d_1 và d_2 chéo nhau. (đpcm)

b) Mặt phẳng đi qua $O(0;\ 0;\ 0)$ và song song với d_1 và d_2 sẽ nhận vectơ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = (8;4;16)$ làm vectơ pháp tuyến, nên phương trình của mặt phẳng đó là: $8(x - 0) + 4(y - 0) + 16(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 4z = 0$

c) Khoảng cách giữa d_1 và d_2 là:

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right\|} = \frac{168}{\sqrt{64+16+256}} = 2\sqrt{21} \text{ (dựa theo câu a)}$$

Bài 32. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) có phương trình:

$$(d): \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5};\ (\alpha): 2x + y + z - 8 = 0$$

a) Tìm góc giữa d và (α).

b) Tìm tọa độ giao điểm của d và (α).

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (α).

Giải

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;3;5)$,

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;1;1)$

$$\text{Ta có } \sin\big(d,(\alpha)\big) = \left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{4+3+5}{\sqrt{38}.\sqrt{4}} = \frac{6}{\sqrt{38}}$$

b) Tọa độ giao điểm của d và (α) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{5}\\ 2x+y+z-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}\\ \dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{5}\\ 2x+y+z-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x=2y+8\\ 3z=5y+8\\ 2x+y+z-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{8}{3}\\ y=0\\ z=\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

Vậy d cắt (α) tại $M=\left(\frac{8}{3};0;\frac{8}{3}\right)$.

c) Hình chiếu vuông góc của d lên (α) là đường thẳng đi qua giao điểm $M\left(\frac{8}{3};0;\frac{8}{3}\right)$ của d và (α) và nhận vectơ: $\left[\left[\vec{u},\vec{n}\right],\vec{n}\right]$ làm vectơ chỉ phương,

trong đó $\vec{u}=(2;3;5)$ là vectơ chỉ phương của (d)

$\vec{n}=(2;1;1)$ là vectơ pháp tuyến của (α).

Ta tính được $\left[\vec{u},\vec{n}\right]=(-2;8;-4)$, $\left[\left[\vec{u},\vec{n}\right],\vec{n}\right]=(12;-6;-18)$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình là: $\begin{cases}x=\dfrac{8}{3}+12t\\ y=-6t\\ z=\dfrac{8}{3}-18t\end{cases}$

Bài 33. Cho đường thẳng Δ và mp(P) có phương trình:

Δ: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$; (P): $2x+z-5=0$.

a) Xác định tọa độ giao điểm A của Δ và (P).

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và vuông góc với Δ.

Giải

a) Tọa độ giao điểm A của Δ và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}\\ 2x+z-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}\\ \dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}\\ 2x+z-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ z=y+1\\ 2x+(y+1)-5=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ z=y+1\\ 2x+2x-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\ z=3\\ x=1\end{cases}.\ \text{Vậy } A=(1;\ 2;\ 3).$$

b) Đường thẳng đi qua A(1; 2; 3), nằm trong (P) và vuông góc với Δ có vectơ chỉ phương là $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}\right]$, trong đó: $\overrightarrow{u} = (1;2;2)$ là vectơ chỉ phương của Δ; $\overrightarrow{n} = (2;0;1)$ là vectơ pháp tuyến của (α). Ta tính được $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}\right] = (2;3;-4)$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}$.

Bài 34.

a) Tính khoảng cách từ điểm M(2; 3; 1) đến đường thẳng Δ có phương trình: d: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$.

b) Tính khoảng cách từ điểm N(2; 3; –1) đến đường thẳng d đi qua điểm $M_0\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{3}{4}\right)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (-4;2;-1)$

Giải

a) Đường thẳng (d): $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ đi qua $M_0(-2;1;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (1;2;-2)$.

Khoảng cách từ M(2; 3; 1) đến đường thẳng (d) là:

$$h = d(M,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0}, \overrightarrow{u}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}.$$

Với $\overrightarrow{MM_0} = (-4;-2;-2)$ nên $\left[\overrightarrow{MM_0}, \overrightarrow{u}\right] = (8;-10;-6)$

Suy ra $d(M,d) = \frac{\sqrt{64+100+36}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$.

b) Ta có $\overrightarrow{NM_0} = \left(-\frac{5}{2};-3;\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{NM_0}, \overrightarrow{u}\right] = \left(\frac{5}{2};-\frac{7}{2};-17\right)$

Khoảng cách từ N đến đường thẳng d đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$ là

$$d = d(N,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{NM_0}, \overrightarrow{u}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|} = \frac{\sqrt{\frac{25}{4} + \frac{49}{4} + 289}}{\sqrt{16+4+1}} = \frac{\sqrt{1230}}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{2870}}{14}.$$

Bài 35. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng sau:

a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 3 \end{cases}$

b) $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$ và $\begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -4 + 3t' \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ đi qua M(1; -1; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (1; -1; 0)$

đường thẳng d': $\begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 3 \end{cases}$ đi qua M'(2; –2; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{n'} = (-3; 3; 0)$

nên ta thấy d // d'.

Vậy khoảng cách giữa d và d' là khoảng cách từ M(1; –1; 1) ∈ d đến đường thẳng d' và bằng: $\dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{MM'}, \vec{n'}\right]\right\|}{\left|\vec{n'}\right|}$

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (1; -1; 2)$, suy ra $\left[\overrightarrow{MM'}, \vec{n'}\right] = (-6; -6; 0)$

Vậy khoảng cách cần tìm là: $\dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{MM'}, \vec{n'}\right]\right\|}{\left|\vec{n'}\right|} = \dfrac{\sqrt{36 + 36}}{\sqrt{9 + 9}} = 2$

b) Đường thẳng d: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$ đi qua M(0; 4; –1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1; 1; -2)$

Đường thẳng d': $\begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -4 + 3t' \end{cases}$ đi qua M'(0; 2; –4) và có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (-1; 3; 3)$

Khoảng cách giữa (d) và (d') là:

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right]\right|} = \frac{2\sqrt{110}}{55}.$$

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho đường thẳng d_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$,

d_2: $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{-z-2}{-1}$

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) $d_1 // d_2$; **(B)** d_1 chéo d_2; **(C)** $d_1 \equiv d_2$; **(D)** d_1 cắt d_2.

2. Giao điểm của đường thẳng $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ với mp(α): $x + y + z - 10 = 0$ là:

(A) (6; −2; 6); **(B)** (−6; 2; −6); **(C)** (6; 2; 6); **(D)** (−6; −2; −6)

3. Góc giữa hai đường thẳng: $d_1 \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ và $d_2 \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ là:

(A) $\cos\varphi = \frac{9}{294}$; **(B)** $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{294}}$;

(C) $\cos\varphi = \frac{9}{\sqrt{294}}$; **(D)** $\cos\varphi = \frac{3}{294}$.

4. Cho cạnh của một hình lập phương bằng $\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa đường chéo của hình lập phương với đường chéo của một mặt bên nếu chúng không cắt nhau là:

(A) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$; **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **(D)** $\frac{1}{2}$.

5. Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} 2Kx + y - z + 1 = 0 \\ x - Ky + z - 1 = 0 \end{cases}$ giá trị của K để (d) nằm trong mặt phẳng Oyz là:

(A) K = 0; **(B)** K = 1; **(C)** K = −1; **(D)** K = 2.

B. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(A)	(C)	(C)	(B)

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I. CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

Câu 1. Cho biết tọa độ hai điểm A, B. Làm thế nào để tìm:

a) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$;

b) Khoảng cách giữa hai điểm A và B;

c) Tọa độ của trung điểm đoạn thẳng AB ?

Hướng dẫn

Cho $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

b) Ta có $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

c) Tọa độ trung điểm AB là: $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Câu 2. Cho tọa độ bốn đỉnh của một hình tứ diện. Làm thế nào để tìm:

a) Tọa độ trọng tâm của tứ diện;

b) Tọa độ của tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện;

c) Thể tích tứ diện;

d) Độ dài đường cao ứng với một mặt của tứ diện ?

Hướng dẫn

Cho tứ diện ABCD có $A = (x_A; y_A; z_A)$, $B = (x_B; y_B; z_B)$, $C = (x_C; y_C; z_C)$, $D = (x_D; y_D; z_D)$

a) Tọa độ trọng tâm tứ diện là:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{2}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{2}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{2}\right)$$

b) Gọi $I = (x_0; y_0; z_0)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, ta có:

$$IA = IB = IC = ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IB = IC \\ IC = ID \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được tọa độ $(x_0; y_0; z_0)$ của tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Từ đó, tính được bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là $R = IA = \sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2 + (z_A - z_0)^2}$

Câu 3. Bằng phương pháp tọa độ, làm thế nào để chứng minh:

a) Hai vectơ cùng phương;

b) Ba vectơ đồng phẳng;

c) Ba điểm thẳng hàng;

d) Bốn điểm không đồng phẳng ?

Hướng dẫn

a) Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$ hoặc $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$.

b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$.

c) Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.

d) Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow$ Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$.

Câu 4. Trong mỗi trường hợp sau, hãy nêu cách viết phương trình mặt phẳng:

a) Đi qua ba điểm không thẳng hàng;

b) Đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước;

c) Đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau cho trước;

d) Đi qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng cho trước;

e) Đi qua một điểm và vuông góc với hai mặt phẳng cho trước;

g) Chứa hai đường thẳng song song hoặc cắt nhau;

h) Đi qua một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Hướng dẫn

a) Mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng là mặt phẳng đi qua A và nhận vectơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.

b) Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d) là mặt phẳng đi qua A và nhận vectơ chỉ phương của (d) làm vectơ pháp tuyến.

c) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 là mặt phẳng đi qua A và nhận vectơ $\vec{n} = \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]$ làm vectơ pháp tuyến; trong đó $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1 và d_2.

d) Mặt phẳng đi qua đường thẳng (d_1) và song song với (d_2) là mặt phẳng đi qua $M_0 \in (d_1)$ và nhận vectơ $\vec{n} = \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]$ làm vectơ pháp tuyến; trong đó $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1 và d_2.

e) Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước (P) và (Q) là mặt phẳng đi qua A và nhận vectơ $\vec{n} = \left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right]$ làm vectơ pháp tuyến; trong đó $\vec{n_1}$ và $\vec{n_2}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q).

g) +) Mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song (d_1) và (d_2) là mặt phẳng đi qua M_1 và nhận vectơ $\left[\vec{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right]$ làm vectơ pháp tuyến; trong đó $M_1 \in (d_1)$, $M_2 \in (d_2)$, $\vec{u_1}$ là vectơ chỉ phương của (d_1).

+) Mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau (d_1) và (d_2) là mặt phẳng đi qua $M_1 \in (d_1)$ và nhận vectơ $\vec{n} = \left[\vec{u_1}, \vec{u_2}\right]$ làm vectơ pháp tuyến; trong đó $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1 và d_2.

h) Mặt phẳng đi qua đường thẳng (d) và vuông góc với mp(P) (d không vuông góc với mp(P)) là mặt phẳng đi qua $M_0 \in$ (d) và nhận vectơ $\left[\vec{u}, \vec{n}\right]$ làm vectơ pháp tuyến; trong đó $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của (d), $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mp(P).

Câu 5. Trong những trường hợp sau, làm thế nào để viết phương trình đường thẳng:

a) Đi qua một điểm và có vectơ chỉ phương cho trước;

b) Đi qua hai điểm phân biệt cho trước;

c) Đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước;

d) Đi qua một điểm và song song với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước;

e) Đi qua một điểm và cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước;

g) Là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cho trước ?

Hướng dẫn

a) Đường thẳng đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u}(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

b) Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B = (x_B;y_B;z_B)$ là đường thẳng đi qua $A(x_A;y_A;z_A)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;y_B - y_A;z_B - z_A)$, nên đường thẳng AB có phương trình là $\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A).t \\ y = y_A + (y_B - y_A).t \\ z = z_A + (z_B - z_A).t \end{cases}$

c) Đường thẳng đi qua $A(x_A;y_A;z_A)$ và vuông góc với mp(α):

$Ax + By + Cz + D = 0$ là đường thẳng đi qua $A(x_A;y_A;z_A)$ và nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A;B;C)$ của (α) làm vectơ chỉ phương nên đường thẳng đó có phương trình: $\begin{cases} x = x_A + At \\ y = y_A + Bt \\ z = z_A + Ct \end{cases}$

d) Đường thẳng đi qua A và song song với hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q) là đường thẳng đi qua A và nhận vectơ $\vec{n} = \left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right]$ làm vectơ chỉ phương; trong đó $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q).

e) Để viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 ta làm như sau:

+) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A và d_1;

+) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A và d_2;

+) Giao tuyến của (P) và (Q) chính là đường thẳng cần tìm, vậy phương trình đường thẳng cần tìm là hệ hai phương trình của mp(P) và mp(Q).

g) Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau, đường vuông góc chung Δ của (d_1) và (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q); trong đó (P) chứa (d_1) và chứa Δ, (Q) chứa (d_2) và chứa Δ.

Vậy để viết được phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) ta cần viết được phương trình của (P) và (Q)

+) Mặt phẳng (P) chứa (d_1) và Δ là mặt phẳng đi qua $M_1 \in d_1$ và nhận vectơ $\left[\vec{n_1}, \left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right]\right]$ làm vectơ pháp tuyến; trong đó $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của (d_1) và (d_2).

+) Mặt phẳng (Q) chứa (d_2) và Δ là mặt phẳng đi qua $M_2 \in d_2$ và nhận vectơ $\left[\vec{n_2}, \left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right]\right]$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình của Δ là hệ phương trình của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Câu 6. Bằng phương pháp tọa độ, làm thế nào để xác định được vị trí tương đối:

a) Giữa hai mặt phẳng ?

b) Giữa hai đường thẳng ?

Hướng dẫn

a) Cho hai mặt phẳng có phương trình: (P): $Ax + By + Cz + D = 0$,

(Q): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

Khi đó, (P) cắt (Q) $\Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$;

$$(P) // (Q) \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'};$$

$$(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}.$$

Chú ý: A: B: C ≠ A': B': C' khi và chỉ khi có ít nhất hai trong ba tỉ số: $\frac{A}{A'}; \frac{B}{B'}; \frac{C}{C'}$ khác nhau.

b) Cho 2 đường thẳng (d_1) đi qua $M_1(x_1;y_1;z_1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}(a_1;b_1;c_1)$ và (d_2) đi qua $M_2(x_2;y_2;z_2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}(a_2;b_2;c_2)$

Khi đó, +) d_1 và d_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u_1}, \vec{u_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \left[\vec{u_1}, \vec{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0.$$

$$+)\ d_1 \text{ và } d_2 \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u_1}, \vec{u_2}, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ đồng phẳng} \\ \vec{u_1}, \vec{u_2} \text{ không cùng phương} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u_1}, \vec{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ \left[\vec{u_1}, \vec{u_2}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$$

$$+)\ d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u_1}, \vec{u_2} \text{ cùng phương} \\ M_1 \notin (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u_1}, \vec{u_2}\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u_2}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$$

$$+)\ d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u_1}, \vec{u_2} \text{ cùng phương} \\ M_1 \in (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u_1}, \vec{u_2}\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u_2}\right] = \vec{0} \end{cases}$$

Chú ý Chúng ta cũng có thể xét vị trí tương đối của hai đường thẳng bằng cách xét số nghiệm của hệ phương trình gồm hai phương trình của hai đường thẳng.

+) Nếu hệ có 1 nghiệm thì hai đường thẳng cắt nhau.

+) Nếu có vô số nghiệm thì hai đường thẳng trùng nhau.

+) Nếu vô nghiệm thì hai đường thẳng song song (nếu đồng phẳng) hoặc chéo nhau.

Câu 7. Bằng phương pháp tọa độ, làm thế nào để tính khoảng cách:

a) Từ một điểm đến một mặt phẳng;

b) Từ một điểm đến một đường thẳng;

c) Giữa hai đường thẳng chéo nhau;

d) Giữa hai đường thẳng song song;

e) Giữa hai mặt phẳng song song;

g) Giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với đường thẳng đó.

Hướng dẫn

Cho điểm $A(x_0; y_0; z_0)$, mp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$;

đường thẳng (d_1): $\begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \\ z = z_1 + c_1t \end{cases}$ và (d_2): $\begin{cases} x = x_2 + a_2t \\ y = y_2 + b_2t \\ z = z_2 + c_2t \end{cases}$

a) Khoảng cách từ điểm A đến mp(α) được xác định như sau:

$$d(A, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

b) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d_1) là:

$$d(A, d_1) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{u_1}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}$$

Trong đó $M_1(x_1; y_1; z_1)$ là điểm nằm trên (d_1), $\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1)$ là vectơ chỉ phương của (d_1).

c) Giả sử d_1 và d_2 chéo nhau, khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}$$

Trong đó $M_1 \in d_1$ và $\overrightarrow{u_1}$ là vectơ chỉ phương của (d_1).

$M_2 \in d_2$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vectơ chỉ phương của (d_2).

d) Giả sử d_1 và d_2 song song với nhau, khi đó khoảng cách từ d_1 đến d_2 là khoảng cách từ 1 điểm bất kì trên (d_1) đến đường thẳng (d_2), chẳng hạn:

$$d(d_1, d_2) = d(M_1, d_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$$

trong đó $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$, $\overrightarrow{u_2}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d_2).

e) Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khi đó khoảng cách giữa (α) và (β) là khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc (β) đến (α).

Chẳng hạn $M(x_0;y_0;z_0) \in (\beta)$ và (α): $Ax + By + Cz + D = 0$

Khi đó $d(\alpha,\beta) = d(M,\alpha) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

g) Giả sử đường thẳng d_1 song song với mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó khoảng cách từ d_1 đến mp(α) là khoảng cách từ 1 điểm M bất kì thuộc d_1 đến mp(α).

Chẳng hạn $M_1(x_1;y_1;z_1) \in d_1$, khi đó ta có:

$$d(d_1,\alpha) = d(M_1,\alpha) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Câu 8. Trong các trường hợp sau, làm thế nào để xác định được tọa độ của điểm;

a) Là hình chiếu của một điểm trên một mặt phẳng cho trước;

b) Là hình chiếu của một điểm trên một đường thẳng cho trước;

c) Đối xứng với một điểm cho trước qua một mặt phẳng cho trước ?

Hướng dẫn

a) Để xác định tọa độ hình chiếu của điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ lên mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ ta làm như sau:

+) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và Δ vuông góc với (α), khi đó (α) có phương trình: $\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$

Trong đó vectơ $\overrightarrow{n}(A;B;C)$ là vectơ pháp tuyến của (α) lại chính là vectơ chỉ phương của Δ (vì $\Delta \perp (\alpha)$)

+) Tìm tọa độ giao điểm của Δ và (α) - là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Giao điểm tìm được chính là hình chiếu của A lên mp(α).

b) Để tìm tọa độ hình chiếu của điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ lên đường thẳng d: $\begin{cases} x = x'_0 + at \\ y = y'_0 + bt \\ z = z'_0 + ct \end{cases}$ ta làm như sau:

+) Viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với d, đó là mặt phẳng đi qua $A(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vectơ chỉ phương của d là

$\vec{u}(a;b;c)$ làm vectơ pháp tuyến, nên mặt phẳng đó có phương trình là: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

+) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng trên ta được hình chiếu vuông góc của A lên d.

c) Để tìm điểm đối xứng A' của $A(x_0;y_0;z_0)$ qua mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ ta làm như sau:

+) Tìm hình chiếu vuông góc H của A lên mp(α).

+) Vì A' đối xứng với A nên H là trung điểm của đoạn AA', từ đó ta tìm được tọa độ A' qua hệ thức: $\begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_H \\ y_A + y_{A'} = 2y_H \\ z_A + z_{A'} = 2z_H \end{cases}$

II. BÀI TẬP

Bài 1. Cho bốn điểm A(1; 6; 2), B(4; 0; 6), C(5; 0; 4), D(5; 1; 3).

a) Chứng minh rằng bốn điểm đó không đồng phẳng;

b) Tính thể tích tứ diện ABCD;

c) Viết phương trình mp(BCD);

d) Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD). Tìm tọa độ tiếp điểm.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-6;4)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-6;2)$, $\overrightarrow{AD}=(4;-5;1)$

nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=4\neq 0$. Suy ra A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Thể tích tứ diện ABCD là:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

c) Mặt phẳng (BCD) là mặt phẳng đi qua B(4; 0; 6) và nhận vectơ $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;0;-2)$, $\overrightarrow{BD}=(1;1;-3)$, suy ra $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(2;1;1)$ nên mp(BCD) có phương trình là:

$$2(x-4)+y+(z-6)=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-14=0$$

d) Mặt cầu tâm A(1; 6; 2) tiếp xúc với mp(BCD) có bán kính là

$$R=d\left(A,\text{mp(BCD)}\right)=\frac{|2+6+2-14|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

nên mặt cầu có phương trình là: $(x-1)^2+(y-6)^2+(z-2)^2=\frac{8}{3}$.

• Tiếp điểm H của mặt cầu với mp(BCD) chính là hình chiếu vuông góc của tâm A(1; 6; 2) lên mp(BCD).

• Để tìm tọa độ điểm H trước hết ta viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và Δ ⊥ (BCD).

Δ đi qua A(1; 6; 2) và nhận vectơ pháp tuyến của mp(BCD) là $\vec{n}=(2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương, nên Δ có phương trình: $\begin{cases}x=1+2t\\y=6+t\\z=2+t\end{cases}$

• Khi đó H là giao điểm của Δ và mp(BCD), nên tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=6+t\\z=2+t\\2x+y+z-14=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{3}\\y=\frac{20}{3}\\z=\frac{8}{3}\end{cases}$$

Vậy $H=\left(\frac{7}{3};\frac{20}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Bài 2. Cho hai điểm A(1; −1; −2), B(3; 1; 1) và mp(P): x − 2y + 3z − 5 = 0.

a) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua mp(P).

b) Tìm góc giữa đường thẳng AB và mp(P).

c) Viết phương trình mp(Q) đi qua A, B và vuông góc với mp(P).

d) Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng AB và mp(P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), đi qua I và vuông góc với AB.

Giải

a) +) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A và (d) ⊥ mp(P).

Đường thẳng (d) đi qua A(1; −1; −2) và nhận vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\vec{n}=(1;-2;3)$ làm vectơ chỉ phương, nên đường thẳng (d) có phương trình

$$\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=-2+3t\end{cases}$$

+) Tìm tọa độ giao điểm H của (d) và mp(P)

Tọa độ của (H) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=-2+3t\\x-2y+3z-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{11}{7}\\y=-\frac{15}{7}\\z=-\frac{2}{7}\end{cases}\quad \text{Vậy } H=\left(\frac{11}{7};\frac{-15}{7};\frac{-2}{7}\right)$$

+) Vì A và A' đối xứng với nhau qua mp(P) nên H chính là trung điểm của AA', ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_H \\ y_A + y_{A'} = 2y_H \\ z_A + z_{A'} = 2z_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x_{A'} = \dfrac{22}{7} \\ -1 + y_{A'} = -\dfrac{30}{7} \\ -2 + z_{A'} = -\dfrac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \dfrac{15}{7} \\ y_{A'} = -\dfrac{23}{7} \\ z_{A'} = \dfrac{10}{7} \end{cases}$$

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;2;3)$, vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n} = (1;-2;3)$ nên góc giữa AB và mp(P) xác định như sau:

$$\sin\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{7}{\sqrt{238}}.$$

c) Mặt phẳng (Q) đi qua AB và vuông góc với mp(P) là mặt phẳng đi qua A(1; -1; –2) và nhận vectơ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n}\right] = (12;-3;-6)$ làm vectơ pháp tuyến, nên mp(Q) có phương trình là:

$$12(x-1) - 3(y+1) - 6(z+2) = 0 \Leftrightarrow 4x - y - 2z - 9 = 0$$

d) Đường thẳng AB có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

nên tọa độ giao điểm I của đường thẳng AB và mp(P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \\ x - 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{23}{7} \\ y = \dfrac{9}{7} \\ z = \dfrac{10}{7} \\ t = \dfrac{8}{7} \end{cases} \quad \text{Vậy} \quad I\left(\frac{23}{7};\frac{9}{7};\frac{10}{7}\right).$$

Vì đường thẳng Δ nằm trong mp(P) và Δ ⊥ AB nên Δ nhận vectc $\overrightarrow{u} = \left[\overrightarrow{n}, \overrightarrow{AB}\right]$ làm vectơ chỉ phương, với $\overrightarrow{AB} = (2;2;3)$, $\overrightarrow{n} = (1;-2;3)$ là vectc pháp tuyến của mp(P).

Ta tính được $\overrightarrow{u} = \left[\overrightarrow{n}, \overrightarrow{AB}\right] = (-12;3;6)$.

Nên phương trình của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = \dfrac{23}{7} - 12t \\ y = \dfrac{9}{7} + 3t \\ z = \dfrac{10}{7} + 6t \end{cases}$

Bài 3. Cho đường thẳng d và mp(P) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{11}{3} + t, \\ z = t \end{cases} \qquad (P): x - 3y + z - 1 = 0$$

a) Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mp(P).

b) Viết phương trình đường thẳng d_1 là hình chiếu của d trên mp(P) theo phương Oz.

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O, cắt d và song song với mp(P).

Giải

a) Hình chiếu d' của d lên mp(P) là giao tuyến của (P) và (Q), trong đó (Q) là mặt phẳng chứa d và (Q) vuông góc với (P). Mặt phẳng (Q) đi qua $M_0\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{11}{3}; 0\right) \in d$ và nhận vectơ $\left[\vec{u}, \vec{n}\right]$ làm vectơ pháp tuyến, trong đó $\vec{u} = (1;1;1)$ là vectơ chỉ phương của d, $\vec{n} = (1;-3;1)$ là vectơ pháp tuyến của (P). Ta tính được $\left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (4;0;-4)$, nên mp(Q) có phương trình là:

$$4\left(x - \frac{2}{3}\right) - 4z = 0 \Leftrightarrow x - z - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x - 3z - 2 = 0$$

Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng (d') là:

$$\begin{cases} x - 3y + z - 1 = 0 \\ 3x - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

b) Hình chiếu d_1 của d trên mp(P) theo phương Oz là giao tuyến của mp(P) và mp(R), trong đó mp(R) là mặt phẳng chứa d và song song với Oz.

Mặt phẳng (R) đi qua $M_0\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{11}{3}; 0\right) \in d$ và nhận vectơ $\left[\vec{u_1}, \vec{k}\right]$ làm vectơ pháp tuyến; trong đó $\vec{u_1} = (1;1;1)$ là vectơ chỉ phương của d và

$\vec{k} = (0;0;1)$ là vectơ chỉ phương của Oz, ta tính được $\left[\vec{u_1}, \vec{k}\right] = (1;-1;0)$. Vậy np(R) có phương trình là $\left(x-\frac{2}{3}\right)-\left(y+\frac{11}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 3x-3y-13=0$

Suy ra phương trình tổng quát của đường thẳng (d_1) là:

$$\begin{cases} x-3y+z-1=0 \\ 3x-3y-13=0 \end{cases}$$

c) Gọi Δ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O, cắt d và song song với np(P). Khi đó Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β). Trong đó (α) là nặt phẳng chứa O và d; (β) là mặt phẳng đi qua O và song song với mp(P).

Mặt phẳng (α) có phương trình: $-11x-2y+13z=0$

Mặt phẳng (β) có phương trình: $x-3y+z=0$

Vậy đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là:

$$\Delta: \begin{cases} -11x-2y+13z=0 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$$

hay Δ có phương trình chính tắc: $\frac{x}{37}=\frac{y}{24}=\frac{z}{35}$.

3ài 4. Cho điểm A(2; 3; 1) và hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x=-2-t \\ y=2+t \\ z=2t \end{cases} \text{ và } d_2: \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}.$$

a) Viết phương trình mp(P) đi qua A và d_1;

b) Viết phương trình mp(Q) đi qua A và d_2;

c) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A cắt cả d_1 và d_2;

d) Tính khoảng cách từ A đến d_2.

Giải

a) Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(-2;\ 2;\ 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{n_1}=(-1;1;2)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và d_1 là mặt phẳng đi qua A(2; 3; 1) và nhận $\left[\overrightarrow{AM_1}, \vec{n_1}\right]=(-1;9;-5)$ làm vectơ pháp tuyến, nên mp(P) có phương trình:

$-(x-2)+9(y-3)-5(z-1)=0 \Leftrightarrow -x+9y-5z-20=0$

b) Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(-5;\ 2;\ 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}=(3;-1;1)$

Mặt phẳng (Q) đi qua A và d_2 sẽ nhận vectơ $\left[\overrightarrow{AM_2}; \vec{u_2}\right]=(-2;4;10)$ làm vectơ pháp tuyến, nên mp(Q) có phương trình:

$-2(x-2)+4(y-3)+10(z-1)=0$

$\Leftrightarrow -2x+4y+10z-18=0 \Leftrightarrow x-2y-5z+9=0$

c) Đường thẳng d đi qua A và cắt cả d_1 và d_2 là giao tuyến của mp(P) và mp(Q) nên d có phương trình tổng quát: $\begin{cases} -x+9y-5z-20=0 \\ x-2y-5z+9=0 \end{cases}$

d) Khoảng cách từ A đến d_2 được xác định như sau:

$$d(A,d_2)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AM_2},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|},\ \text{với } \left[\overrightarrow{AM_2},\overrightarrow{u_2}\right]=(-2;4;10)$$

ta có $d(A,d_2)=\dfrac{\sqrt{4+16+100}}{\sqrt{9+1+1}}=\dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{11}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{\sqrt{11}}$.

Bài 5. Cho hai đường thẳng:

$$d: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-6}{3} \text{ và } d': \begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=3-t \end{cases}$$

a) Chứng minh hai đường thẳng đó chéo nhau. Tìm góc giữa chúng.

b) Tìm khoảng cách giữa d và d'.

c) Viết phương trình đường vuông góc chung của d và d'.

d) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả d và d'.

Giải

Đường thẳng d đi qua M(0; 1; 6) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$

d' đi qua M'(1; −2; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}=(1;1;-1)$

a) Ta có $\overrightarrow{MM'}=(1;-3;-3)$, $\left[\vec{u},\vec{u'}\right]=(-5;4;-1)$

suy ra $\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'}=-14\neq 0$ nên d và d' chéo nhau.

Ta có $\cos(d,d')=\left|\cos(\vec{u},\vec{u'})\right|=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{u'}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{u'}\right|}=0$, vậy $d\perp d'$.

b) Ta có $\left[\vec{u},\vec{u'}\right]=(-5;4;-1)$, $\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'}=-14$ (theo câu a)

Vậy $d(d,d')=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}=\dfrac{14}{\sqrt{42}}$.

c) Theo câu a, ta có d $\perp$ d’, vậy đường vuông góc chung của d và d’ chính à giao tuyến của mp(P) và mp(Q); Trong đó mp(P) chứa d và vuông góc với ’, mp(Q) chứa d’ và vuông góc với d.

Phương trình mp(P) là: $1(x - 0) + 1(y - 1) - 1(z - 6) = 0$

$$\Leftrightarrow x + y - z + 5 = 0$$

Phương trình mp(Q) là: $1(x - 1) + 2(y + 2) + 3(z - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 3z - 6 = 0$$

Vậy phương trình đường vuông góc chung của d và d’ là:

$$\begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

hoặc có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -1 - 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

d) Đường thẳng song song với Oz và cắt cả d và d’ là giao tuyến của mp(α) và mp(β);.

Trong đó (α) là mặt phẳng chứa d và song song với Oz,

(β) là mặt phẳng chứa d’ và song song với Oz.

Đường thẳng Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{k} = (0;0;1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua M(0; 1; 6) và nhận $\left[\vec{u}, \vec{k}\right] = (2;-1;0)$ làm vectơ pháp tuyến nên (α) có phương trình: $2x - y + 1 = 0$

Tương tự mp(β) có phương trình: $x - y - 3 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$

hay có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \\ z = -6 + t \end{cases}$

Bài 6. Cho hai đường thẳng:

d: $\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ và d’: $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 2}{-3} = \dfrac{z - 5}{4}$.

a) Chứng minh rằng d và d’ đồng phẳng. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa chúng.

b) Tính thể tích hình tứ diện giới hạn bởi mp(P) và ba mặt phẳng tọa độ.

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện nói trên.

Giải

a) Đường thẳng d đi qua M(7; 2; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;2;-2)$, d' đi qua M'(1; –2; 5) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (2;-3;4)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right] = (2;-16;-13)$, $\overrightarrow{MM'} = (-6;-4;4)$

Mặt phẳng (P) chứa d và d' có vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right] = (2;-16;-13)$ và (P) đi qua M(7; 2; 1) ∈ d nên (P) có phương trình là:

$2(x-7) - 16(y-2) - 13(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 16y - 13z + 31 = 0$

b) Mặt phẳng (P) cắt Ox tại $A\left(-\frac{31}{2};0;0\right)$; cắt Oy tại $B\left(0;\frac{31}{16};0\right)$; cắt Oz tại $C\left(0;0;\frac{31}{13}\right)$. Suy ra thể tích tứ diện cần tìm là:

$$V = \frac{1}{6}.OA.OB.OC = \frac{1}{6}.\frac{31}{2}.\frac{31}{16}.\frac{31}{13} = \frac{31^3}{2496} = \frac{29791}{2496}.$$

c) Viết phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm O, A, B, C.

Gọi phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

Vì mặt cầu đi qua O(0; 0; 0) nên d = 0,

Vì mặt cầu đi qua $A\left(-\frac{31}{2};0;0\right)$ nên $a = \frac{31}{2}$,

Vì mặt cầu đi qua $B\left(0;\frac{31}{16};0\right)$ nên $b = -\frac{31}{16}$,

Vì mặt cầu đi qua $C\left(0;0;\frac{31}{13}\right)$ nên $c = -\frac{31}{13}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{31}{2}x - \frac{31}{16}y - \frac{31}{13}z = 0$.

Bài 7. Cho hai đường thẳng: d: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 6 + t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$

a) Chứng minh rằng d và d' chéo nhau và vuông góc với nhau.

b) Viết phương trình mp(P) đi qua d và vuông góc với d', phương trình của mp(Q) đi qua d' và vuông góc với d.

c) Viết phương trình chính tắc của đường vuông góc chung của d và d'.

Giải

Đường thẳng d đi qua M(0; 3; 6) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (1;0;1)$

d' đi qua M'(2; 1; 2) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (1;-1;-1)$

a) Ta có $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (1;2;-1)$, $\overrightarrow{MM'} = (2;-2;-4)$ nên $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'} = 2 \neq 0$ nên d và d' chéo nhau;

Mặt khác $\vec{u}.\vec{u'} = 0$ nên d và d' vuông góc với nhau.

b) Mặt phẳng (P) đi qua d và vuông góc với d' nên (P) đi qua điểm M(0; 3; 6) ∈ d và nhận vectơ chỉ phương của d' là $\vec{u'} = (1;-1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy mp(P) có phương trình là:

$(x - 0) - (y - 3) - (z - 6) = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 9 = 0$

Tương tự, ta viết được phương trình mặt phẳng (Q) là: $x + z - 4 = 0$

c) Vì d và d' vuông góc với nhau nên đường vuông góc chung (Δ) của d và d' chính là giao tuyến của (P) và (Q). Theo câu b, ta có phương trình tổng quát của (Δ) là:

$$\begin{cases} x - y - z + 9 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Chuyển về phương trình chính tắc ta được

$$\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

Bài 8. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình:

(P): $2x - y + z + 2 = 0$ và (Q): $x + y + 2z - 1 = 0$

a) Chứng minh rằng (P) và (Q) cắt nhau. Tìm góc giữa hai mặt phẳng đó.

b) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A(1; 2; –3), song song với cả (P) và (Q).

c) Viết phương trình mp(R) đi qua B(–1; 3; 4), vuông góc với cả (P) và (Q).

Giải

a) mp(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (2;-1;1)$,

mp(Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n_2} = (1;1;2)$.

Ta có $\left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right] = (-3;-3;3) \neq \vec{0}$, vậy (P) và (Q) cắt nhau.

$$\text{Ta có } \cos(P, Q) = \left|\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})\right| = \frac{\left|\vec{n_1}.\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|.\left|\vec{n_2}\right|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (P, Q) = 60^0$$

b) Đường thẳng d đi qua A(1; 2; –3) và song song với cả (P) và (Q) là đường thẳng đi qua A(1; 2; –3) và nhận $\left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right] = (-3;-3;3)$ làm vectơ chỉ phương, vậy phương trình của d là: $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{3}$.

c) Mặt phẳng (R) đi qua B(–1; 3; 4) và vuông góc với cả (P) và (Q) là mặt phẳng đi qua B(-1; 3; 4) và nhận $\left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right] = (-3; -3; 3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy (R) có phương trình là: $-3(x + 1) - 3(y - 3) + 3(z - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$$

Bài 9. Cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

a) Tìm tọa độ tâm mặt cầu và tính bán kính mặt cầu.

b) Tùy theo giá trị của k, xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mp(P) với (P): $x + y - z + k = 0$

c) Mặt cầu cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác với gốc tọa độ O. Viết phương trình mp(ABC).

d) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B.

e) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (Q): $4x + 3y - 12z - 1 = 0$

Giải

a) Phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 14$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm là I = (1; 2; 3), có bán kính $R = \sqrt{14}$.

b) Ta có khoảng cách từ tâm I(1; 2; 3) của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) là: $h = d(I, P) = \dfrac{|1 + 2 - 3 + k|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|k|}{\sqrt{3}}$

Nếu $h = R \Leftrightarrow \dfrac{|k|}{\sqrt{3}} = \sqrt{14} \Leftrightarrow |k| = \sqrt{42}$ thì (P) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu.

Nếu $h > R \Leftrightarrow \dfrac{|k|}{\sqrt{3}} > \sqrt{14} \Leftrightarrow |k| > \sqrt{42}$ thì mp(P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

Nếu $h < R \Leftrightarrow \dfrac{|k|}{\sqrt{3}} < \sqrt{14} \Leftrightarrow |k| < \sqrt{42}$ thì mp(P) cắt mặt cầu (S).

c) Mặt cầu (S) cắt trục Ox tại A(2; 0; 0) và O(0; 0; 0)
(S) cắt trục Oy tại B(0; 4; 0) và O(0; 0; 0)
(S) cắt trục Oz tại C(0; 0; 6) và O(0; 0; 0)

Vậy mặt phẳng (ABC) có phương trình: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{6} = 1$

$$\Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$$

d) Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B(0; 4; 0) là mặt phẳng đi qua B(0; 4; 0) và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BI} = (1; -2; +3)$, vậy phương trình của mặt phẳng đó là: $(x - 0) - 2(y - 4) + 3(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 8 = 0$

e) Vì mặt phẳng cần tìm song song với mp(Q): $4x + 3y - 12z - 1 = 0$ nên có phương trình dạng: $4x + 3y - 12z + D = 0\ (\alpha)$

Vì mặt phẳng này tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$d(I,\alpha) = R \Leftrightarrow \frac{|4+6-36+D|}{\sqrt{16+9+144}} = \sqrt{14} \Leftrightarrow |-26+D| = 13\sqrt{14}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 26 + 13\sqrt{14} \\ D = 26 - 13\sqrt{14} \end{array}\right.$$

Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $4x + 3y - 12z + 26 + 13\sqrt{14} = 0$

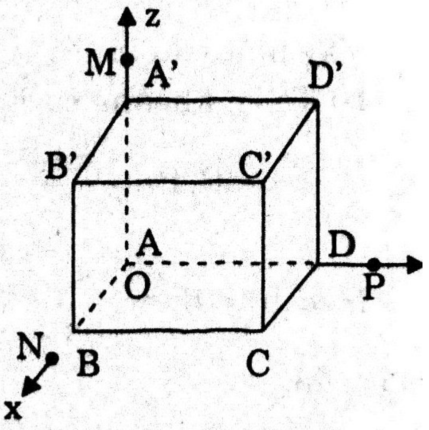
hoặc $4x + 3y - 12z + 26 - 13\sqrt{14} = 0$

Bài 10. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Trên các tia AA', AB, AD (có chung gốc A) lần lượt lấy các điểm M, N, P khác A sao cho AM = m, AN = n và AP = p.

a) Tìm sự liên hệ giữa m, n, p sao cho mp(MNP) đi qua đỉnh C' của hình lập phương.

b) Trong trường hợp mp(MNP) luôn đi qua C', hãy tìm thể tích bé nhất của tứ diện AMNP. Khi đó tứ diện AMNP có tính chất gì ?

Giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho A ≡ O, Ox, Oy, Oz lần lượt chứa các tia AB, AD, AA'. Khi đó C' = (1; 1; 1), M(0; 0; m), N(n; 0; 0), P(0; p; 0) với m, n, p dương.

a) Mặt phẳng (MNP) có phương trình viết theo đoạn chắn :

$$\frac{x}{n} + \frac{y}{p} + \frac{z}{m} = 1.$$

Để mp(MNP) đi qua điểm C'(1; 1; 1) thì : $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} = 1.$

b) Thể tích tứ diện AMNP là $V = \frac{1}{6}AM.AN.AP = \frac{1}{6}m.n.p.$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} \Leftrightarrow 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} \Leftrightarrow mnp \geq 27$$

Suy ra $V = \frac{1}{6}mnp \geq \frac{27}{6}$, dấu "=" xảy ra khi m = n = p = 3.

Vậy thể tích bé nhất của tứ diện AMNP khi mp(MNP) đi qua C' là $\frac{27}{6}$ tương ứng với m = n = p = 3.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

A. Đề bài.

1. Cho ba điểm M(2; 0; 0), N(0; –3; 0), P(0; 0; 4). Nếu MNPQ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là:

(A) (–2; –3; 4); **(B)** (3; 4; 2) ;

(C) (2; 3; 4) ; **(D)** (–2; –3; –4).

2. Cho ba điểm A(1; 2; 0), B(1; 0; –1), C(0; –1; 2). Tam giác ABC là :

(A) Tam giác cân đỉnh A; **(B)** Tam giác vuông đỉnh A ;

(C) Tam giác đều ; **(D)** Không phải như (A), (B), (C).

3. Cho tam giác ABC có A = (1; 0; 1), B = (0; 2; 3), C = (2; 1; 0). Độ dài đường cao tam giác kẻ từ C là:

(A) $\sqrt{26}$; **(B)** $\frac{\sqrt{26}}{2}$; **(C)** $\frac{\sqrt{26}}{3}$; **(D)** 26.

4. Ba đỉnh của một hình bình hành có tọa độ là (1; 1; 1), (2; 3; 4) , (6; 5; 2). Diện tích của hình bình hành đó là:

(A) $2\sqrt{83}$; **(B)** $\sqrt{83}$; **(C)** 83 ; **(D)** $\frac{\sqrt{83}}{2}$.

5. Cho A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) và D(–2; 1; –1). Thể tích của tứ diện ABCD là:

(A) 1 ; **(B)** 2 ; **(C)** $\frac{1}{3}$; **(D)** $\frac{1}{2}$.

6. Cho A(–1; –2; 4), B(–4; –2; 0), C(3; –2; 1) và D(1; 1; 1). Độ dài đường cao của tứ diện ABCD kẻ từ đỉnh D là:

(A) 3 ; **(B)** 1 ; **(C)** 2 ; **(D)** $\frac{1}{2}$.

7. Cho bốn điểm A(1; 1; 1), B(1; 2; 1), C(1; 1; 2) và D(2; 2; 1). Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tọa độ:

(A) $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$; **(B)** $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$;

(C) (3; 3; 3) ; **(D)** (3; –3; 3)

8. Bán kính mặt cầu tâm I(3; 3; –4) tiếp xúc với trục Oy bằng:

(A) 5 ; **(B)** 4 ; **(C)** $\sqrt{5}$; **(D)** $\frac{5}{2}$

9. Mặt cầu tâm I(2; 1; –1) tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình là:

(A) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$;

(B) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$;

(C) $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$;

(D) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

10. Cho ba điểm A(1; 1; 3), B(−1; 3; 2) và C(−1; 2; 3). Mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

(A) $x + 2y + 2z - 3 = 0$; **(B)** $x - 2y + 3z - 3 = 0$;
(C) $x + 2y + 2z - 9 = 0$; **(D)** $x^2 + 2y + 2z + 9 = 0$.

11. Cho ba điểm A(1; 0; 0), B(0; 2; 0) và C(0; 0; 3). Phương trình nào sau đây không phải là phương trình mặt phẳng (ABC)?

(A) $x + \frac{y}{2} + \frac{y}{3} = 1$; **(B)** $6x + 3y + 2z - 6 = 0$;
(C) $6x + 3y + 2z + 6 = 0$; **(D)** $12x + 6y + 4z - 12 = 0$.

12. Cho hai điểm A(1; 3; −4) và B(−1; 2; 2). Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

(A) $4x + 2y - 12z - 17 = 0$; **(B)** $4x + 2y + 12z - 17 = 0$
(C) $4x - 2y - 12z - 17 = 0$; **(D)** $4x - 2y + 12z + 17 = 0$.

13. Cho A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), a, b, c là những số dương thay đổi sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định có tọa độ là:

(A) (1; 1; 1) ; **(B)** (2; 2; 2) ;
(C) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; **(D)** $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

14. Cho điểm A(−1; 2; 1) và hai mặt phẳng (P): $2x + 4y - 6z - 5 = 0$ và (Q): $x + 2y - 3z = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) mp(Q) đi qua A và song song với (P) ;
(B) mp(Q) không đi qua A và song song với (P) ;
(C) mp(Q) đi qua A và không song song với (P) ;
(D) mp(Q) không đi qua A và không song song với (P).

15. Cho điểm A(1; 2; −5). Gọi M, N, P là hình chiếu của A trên ba trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (MNP) là:

(A) $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} = 1$; **(B)** $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1$;
(C) $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} = 0$; **(D)** $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} + 1 = 0$.

16. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 22 = 0$ và mặt phẳng (P): $3x - 2y + 6z + 14 = 0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) tới mặt phẳng (P) là:

(A) 1 ; **(B)** 2 ; **(C)** 3 ; **(D)** 4.

17. Mặt phẳng (P) cắt ba trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C trọng tâm tam giác ABC là G(−1; −3; 2). Phương trình mặt phẳng (P) là:

(A) $x + y - z - 5 = 0$; **(B)** $2x - 3y - z - 1 = 0$;
(C) $x + 3y - 2z + 1 = 0$; **(D)** $6x + 2y - 3z + 18 = 0$.

18. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (A'MD)

Một học sinh giải như sau:

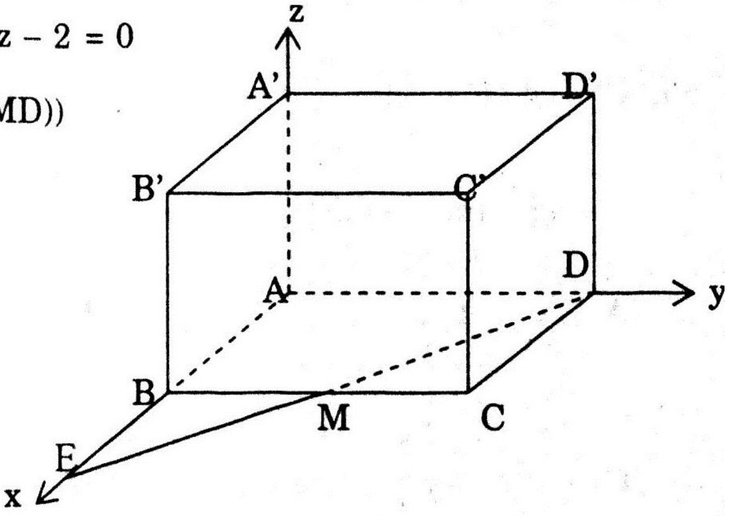
Bước 1 : Chọn hệ trục tọa độ như hình bên. Kéo dài DM cắt AB tại E. Khi đó: A = (0; 0; 0), E = (2; 0; 0) , D = (0; 1; 0), A' = (0; 0; 1)

Bước 2 : Viết phương trình mặt phẳng (A'MD) :

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow x+2y+2z-2=0$$

Bước 3 : Khoảng cách d(A;(A'MD))

$$=\frac{|-2|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3}$$



Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

(A) Đúng;

(B) Sai ở bước 1;

(C) Sai ở bước 2 ;

(D) Sai ở bước 3.

19. Cho hai điểm A(1; –1; 5) và B(0; 0; 1). Mặt phẳng (P) chứa A,B và song song với Oy có phương trình là:

(A) $4x - z + 1 = 0$; **(B)** $4x + y - z + 1 = 0$;

(C) $2x + z - 5 = 0$; **(D)** $y + 4z - 1 = 0$.

20. Mặt phẳng (P) chứa trục Oz và điểm A(2; –3; 5) có phương trình là:

(A) $2x + 3y = 0$; **(B)** $2x - 3y = 0$;

(C) $3x + 2y = 0$; **(D)** $3x - 2y + z = 0$.

21. Cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - y - 1 = 0$. Điểm H(2; –1; –2) là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên một mặt phẳng (Q). Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng:

(A) 30° ; **(B)** 45° ; **(C)** 60° ; **(D)** 90°

22. Cho điểm A(1; 2; 3) và đường thẳng d: $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{4}=z+3$. Phương trình mặt phẳng (A, d) là:

(A) $23x + 17y - z + 14 = 0$; **(B)** $23x - 17y - z + 14 = 0$;

(C) $23x + 17y + z - 14 = 0$; **(D)** $23x - 17y + z - 14 = 0$

23. Cho $d_1 : \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{3}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t\,0. \\ z = 2 + 6t \end{cases}$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) d_1, d_2 cắt nhau ; **(B)** d_1, d_2 trùng nhau ;

(C) $d_1 // d_2$; **(D)** d_1, d_2 chéo nhau.

24. Cho mặt phẳng (α): x + 3y + z + 1 = 0 và đường thẳng d : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm A của d và (α) là:

(A) A(3; 0; 4) ; **(B)** A(3; −4; 0) ;

(C) A(−3; 0; 4) ; **(D)** A(3; 0; −4).

25. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Phương trình nào sau đây cũng là phương trình của đường thẳng d?

(A) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}$; **(B)** $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 1 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$; **(D)** $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

26. Cho hai điểm A(2; 3; −1) và B(1; 2; 4) và ba phương trình sau:

(I) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$; (II) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-5}$ (III) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Chỉ có (I) là phương trình của đường thẳng AB;

(B) Chỉ có (III) là phương trình của đường thẳng AB;

(C) Chỉ có (I) và (II) là phương trình của đường thẳng AB;

(D) Cả (I), (II) và (III) đều là phương trình của đường thẳng AB.

27. Cho ba điểm A(1; 3; 2) , B(1; 2; 1) , C(1; 1; 3). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mp (ABC)

Một học sinh giải như sau:

Bước 1 : Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G = \dfrac{1+1+1}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{3+2+1}{3} = 2 \\ z_G = \dfrac{2+1+3}{3} = 2 \end{cases}$

Bước 2 : Vectơ pháp của mp(ABC) là : $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right] = (-3; 1; 0)$

Bước 3 : Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}$

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào?

(A) Đúng ; **(B)** Sai ở bước 1 ;

(C) Sai ở bước 2 ; **(D)** Sai ở bước 3.

28. Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ O, vuông góc với trục Ox và vuông góc với đường thẳng A: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$. Phương trình của d là:

(A) $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$; **(B)** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$; **(C)** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1}$; **(D)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

29. Cho đường thẳng $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 3 = 0$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) d song song với (P); **(B)** d cắt (P) ;

(C) d vuông góc với (P); **(D)** d nằm trên (P).

30. Cho điểm A(1; 1; 1) và đường thẳng $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Hình chiếu của A trên d có tọa độ là:

(A) (2; –3; 1) ; **(B)** (2; –3; –1) ;

(C) (2; 3; 1) ; **(D)** (–2; 3; 1)

31. Cho tứ diện ABCD có A(1; 0; 0) , B(1; 1; 0), C(0; 1; 0) và D(0; 0 ;2). Tính khoảng cách giữa AC và BD.

Một học sinh giải như sau:

Bước 1 : $\overrightarrow{AC} = (-1;1;0), \overrightarrow{BD} = (-1;-1;2), \overrightarrow{AB} = (0;1;0)$

Bước 2 : $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right] = (2;2;2)$

Bước 3 : $d(AC, BD) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right]\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào?

(A) Đúng ; (B) Sai ở bước 1 ;

(C) Sai ở bước 2 ; (D) Sai ở bước 3.

2. Cho $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$, $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$. Góc giữa vectơ $\vec{v}$ và vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ bằng :

A) 30° ; (B) 45° ; (C) 60° ; (D)90°.

3. Cho $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$, $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$. Độ dài vectơ $[\vec{u}, \vec{v}]$ bằng:

(A) 10 ; (B) 5 ; (C) 8 ; (D) $5\sqrt{3}$.

4. Mặt phẳng $2x - 3y + z - 1 = 0$ cắt các trục tọa độ tại các điểm:

(A) $\left(\frac{1}{2};0;0\right),\left(0;-\frac{1}{3};0\right),(0;0;1)$; (B) $(1;0;0)\left(0;\frac{1}{3};0\right),(0;0;1)$;

(C) $\left(\frac{1}{2};0;0\right),\left(0;\frac{1}{3};0\right),(0;0;1)$; (D) $\left(\frac{1}{2};0;0\right),\left(0;-\frac{1}{3};0\right),(0;0-1)$.

5. Cho đường thẳng: $d : \begin{cases} x = -\frac{9}{5} - t \\ y = 5t \\ z = \frac{7}{5} + 3t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $3x - 2y + 3z - 1 = 0$. Gọi d' là hình chiếu của d trên (P). Trong các vectơ sau, vectơ nào không phải là vectơ chỉ phương của hình chiếu d trên (P):

(A) (5; −51; −39) ; (B) (10; −102; −78) ;

(C) (−5; 51; 39) ; (D) (5; 51; 39) ;

6. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của A'B', BC, DD'. Chứng minh rằng AC' ⊥ (MNP)

Một học sinh giải như sau:

Bước 1 : Chọn hệ trục tọa độ như hình bên.

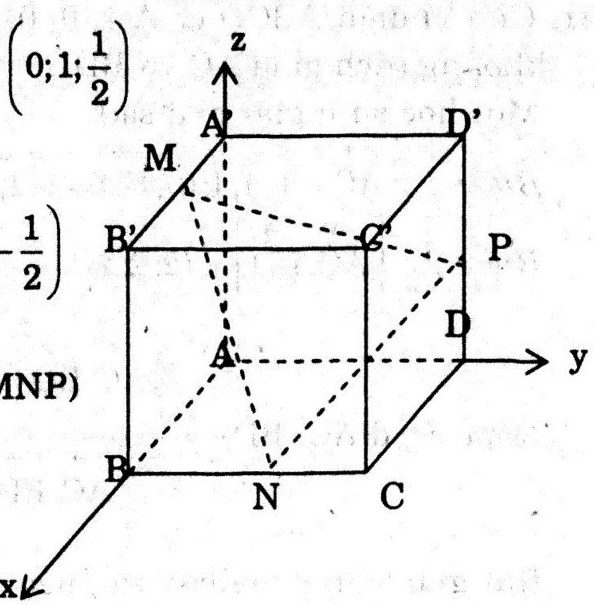
Khi đó A = (0; 0; 0) , C' = (1; 1; 1)

$$M = \left(\frac{1}{2};0;1\right),\ N = \left(1;\frac{1}{2};0\right);\ P = \left(0;1;\frac{1}{2}\right)$$

Bước 2 : Tính $\overrightarrow{AC'} = (1; 1; 1)$,

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right), \overrightarrow{MD} = \left(-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$$

Bước 3 : $\begin{cases} \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = 0 \\ \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AP} = 0 \end{cases} \Rightarrow AC' \perp mp(MNP)$



Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào?

(A) Đúng ; **(B)** Sai ở bước 1 ;

(C) Sai ở bước 2 ; **(D)** Sai ở bước 3.

37. Cho đường thẳng d : $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Phương trình đường vuông góc chung của d và trục Ox là:

(A) $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$; **(B)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$; **(C)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$; **(D)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

38. Cho mặt phẳng (P): $x - 2y - 3z + 14 = 0$ và điểm M(1; –1; 1). Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mp (P) là:

(A) (–1; 3; 7) ; **(B)** (1; –3; 7) ; **(C)** (2; –3; –2) ; **(D)** (2; –1; 1)

39. Cho điểm A(0; –1; 3) và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$. Khoảng cách từ A đến d bằng:

(A) $\sqrt{3}$; **(B)** $\sqrt{14}$; **(C)** $\sqrt{6}$; **(D)** $\sqrt{8}$.

40. Cho điểm M(–1; 2; –3). Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Oxy), (Oxz), (Oyz). Phương trình mp($M_1M_2M_3$) là:

(A) $6x + 2y + 3z + 6 = 0$; **(B)** $6x - 2y + 3x + 6 = 0$;

(C) $6x - 3y + 2z + 6 = 0$; **(D)** $6x - 3y - 2z + 6 = 0$.

41. Cho mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$. Phương trình nào sau đây là phương trình tiếp xúc với mặt cầu (S)?

(A) $6x + 2y + 3z = 0$; **(B)** $2x + 3y + 6z - 5 = 0$;

(C) $6x + 2y + 3z - 55 = 0$; **(D)** $x + 2y + 2z - 7 = 0$.

42. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Trong ba điểm (0; 0; 0), (1; 2; 3), (2; –1; –1) có bao nhiêu điểm nằm trong mặt cầu (S)?

(A) 0 ; **(B)** 1 ; **(C)** 2 ; **(D)** 3.

B. Đáp án.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	(C)	(D)	(C)	(A)	(D)	(A)	(B)	(A)	(A)	(C)

Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	(D)	(A)	(C)	(A)	(A)	(C)	(D)	(A)	(A)	(C)

Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	**(B)**	**(B)**	**(C)**	**(D)**	**(B)**	**(D)**	**(C)**	**(D)**	**(D)**	**(A)**

Câu	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Đáp án	**(A)**	**(D)**	**(B)**	**(A)**	**(D)**	**(A)**	**(D)**	**(A)**	**(B)**	**(C)**

Câu	41	42
Đáp án	**(C)**	**(B)**

C. Hướng dẫn giải.

1. Vì MNPQ là hình bình hành nên $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ}$

Mà $\overrightarrow{NM} = (2; 3; 0)$, $\overrightarrow{PQ} = (x_Q; y_Q; Z_Q - 4)$

Suy ra $x_Q = 2$; $y_Q = 3$; $Z_Q = 4$. Vậy ta chọn **(C)**

2. Ta có $AB = \sqrt{5}$; $BC = \sqrt{11}$; $AC = \sqrt{14}$

Vậy A, B, C không thể là đỉnh của tam giác cân hay tam giác vuông, hay tam giác đều. Vậy ta chọn **(D)**

3. Ta có độ dài đường cao kẽ từ C là khoảng cách từ C đến đường thẳng AB

và được tính theo công thức: $h = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$. Vậy ta chọn **(C)**

4. Gọi A(1; 1; 1) , B(2; 3; 4) ; C(6; 5; 2) và D(7; 7; 5). Diện tích hình bình hành ABCD là:

$S = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$ (vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ nên AB và AC là 2 cạnh kề nhau của hình bình hành). Vậy $S = \sqrt{332} = 2\sqrt{83}$. Nên ta chọn **(A)**.

5. Thể tích tứ diện ABCD được tính theo công thức: $V = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

Ta tính được $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1; 1; 1)$ nên $V = \dfrac{1}{2}$. Vậy chọn **(D)**

6. Độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh D được xác định như sau:

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|}.$$

Ta có $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -25; 0)$, $\overrightarrow{AD} = (2; 3; -3)$

Suy ra $h = \dfrac{|-75|}{25} = 3$. Vậy chọn **(A)**.

7. $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD khi $\begin{cases} IA = IB \\ IB = IC \\ IC = ID \end{cases}$

Giải hệ ta tìm được $I = \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$. Vậy chọn **(B)**.

8. Nếu mặt cầu tâm $I(3; 3; -4)$ tiếp xúc với trục Oy thì bán kính là khoảng cách từ I đến trục Oy bằng: $R = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. Vậy chọn **(A)**.

9. Nếu mặt cầu tâm $I(2; 1; -1)$ tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên có bán kính là khoảng cách từ I đến mp(Oyz) và bằng : 2 nên phương trình mặt cầu là: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$. Vậy chọn **(A)**.

10. Mặt phẳng (ABC) là mặt phẳng đi qua $A(1; 1; 3)$ và nhận vectơ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ làm vectơ pháp tuyến. Ta có $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 2; 2)$ nên mp ABC) có phương trình là : $x + 2y + 2z - 9 = 0$. Vậy chọn **(C)**.

11. Mặt phẳng (ABC) có phương trình viết theo đoạn chắn là:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$$

$\Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow 12x + 6y + 4z - 12 = 0$. Vậy chọn **(D)**.

12. Mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua trung điểm $I\left(0; \dfrac{5}{2}; -1\right)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AB}(-2; -1; 6)$ làm vectơ pháp tuyến , nên mặt phẳng có phương trình là: $-2x - (y - \dfrac{5}{2}) + 6(z + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -4x - 2y + 12z + 17 = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y - 12z - 17 = 0$$

Vậy chọn **(A)**

13. Phương trình mặt phẳng (ABC) viết theo đoạn chắn là : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

mà $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 2$ nên ta thấy (ABC) đi qua điểm $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

Vậy chọn **(C)**

14. Thay tọa độ của điểm $A(-1; 2; 1)$ và phương trình mp(Q) ta thấy thỏa mãn, vậy (Q) đi qua A.

Mặt khác, $\begin{cases} \text{(P) và (Q) có cùng vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (1; 2; 3) \\ A \notin (P) \end{cases}$.

Nên (P) và (Q) song song với nhau. Vậy chọn **(A)**

15. Vì M, N, P là hình chiếu của A(1; 2; –5) lên ba trục Ox, Oy, Oz nên ta có: M)1; 0; 0), N(0; 2; 0), P(0; 0; -5)

Vậy mp(MNP) có phương trình là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-5} = 1 \Leftrightarrow x + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} = 1$

Vậy chọn **(A).**

16. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là I = (1; 1; 1). Khoảng cách từ I(1; 1; 1) đến mp(P):

$3x - 2y + 6z + 14 = 0$ là : $h = \frac{|3 - 2 + 6 + 14|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{21}{7} = 3$. Vậy chọn **(C)**

17. Vì G(–1; –3; 2) là trọng tâm tam giác ABC với A(a; 0; 0) , B(0; b; 0) ,

C(0; 0; c) nên ta có $\begin{cases} \frac{a}{3} = -1 \\ \frac{b}{3} = -3 \\ \frac{c}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \\ c = 6 \end{cases}$

Vậy phương trình mp(ABC) là: $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-9} + \frac{z}{6} = 1$

$\Leftrightarrow -6x - 2y + 3z - 18 = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y - 3z + 18 = 0$. Vậy chọn **(D)**

18. Học sinh giải đúng. Vậy chọn **(A)**

19. Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song vớo Oy sẽ có vectơ pháp tuyến là: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{J}]$. Trong đó $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -4)$, $\overrightarrow{J} = (0; 1; 0)$ là vectơ chỉ phương của Oy ta tính được $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{J}] = (4; 0; -1)$

Nên mp(P) có phương trình là: $4x - z + 1 = 0$. Vậy chọn **(A)**

20. Mặt phẳng (P) chứa trục Oz và điểm A(2; –3; 5). Vì mặt phẳng (P) chứa trục Oz nên có phương trình dạng $Ax + By = 0$, vì mp (P) đi qua A(2; –3; 5) nên ta có: $2A - 3B = 0$, chọn $A = 3 \Rightarrow B = 2$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

Vậy mp(P) có phương trình : $3x + 2y = 0$. Vậy chọn **(C)**

21. Vì mp(Q) chứa điểm (H) là hình chiếu vuông góc của O nên mp (Q) đi qua H và nhận $\overrightarrow{OH} = (2; -1; -2)$ làm vectơ pháp tuyến , nên mp(Q) có phương trình: $2(x - 2) - (y + 1) - 2(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2z - 9 = 0$

Góc giữa (P) và (Q) được xác định theo công thức

$$\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{OH})\right| = \frac{|1.2 - 1.(-1)|}{\sqrt{2}.\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$. Vậy chọn **(B)**

22. Phương trình d: $\frac{x}{3} = \frac{y - 1}{4} = z + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 3 = 0 \\ y - 4z - 13 = 0 \end{cases}$

Mặt phẳng (α) chứa d có dạng : $m(4x - 3y + 3) + n(y - 4z - 13) = 0$, $m^2 + n^2 \neq 0$. Vì mp(α) đi qua A(1; 2; 3) nên ta có:

$m(4 - 6 + 3) + n(2 - 12 - 13) = 0$

$\Leftrightarrow m - 23n = 0$. ta chọn $n = 1 \Rightarrow m = 23$

Vậy phương trình mp (α) là: $23(4x - 3y + 3) + (y - 4z - 13) = 0$

$\Leftrightarrow 92x - 68y - 4z + 56 = 0 \Leftrightarrow 23x - 17y - z + 14 = 0$. Vậy chọn **(B).**

Chú ý: Có thể tìm ra phương trình mp(α) bằng cách thay tọa độ của A(1; 2; 3) vào các phương án đã cho và sử dụng phương pháp loại trừ.

23. d_1 đi qua M_1 (1 ; 0; 3) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 2; 3)$

d_2 đi qua M_2 (0; 1; 2) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (2; 4; 6)$

Ta thấy $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương, chứng tỏ d_1 và d_2 song song hoặc trùng nhau. Mặt khác điểm $M_1(1; 0; 3)$ không thuộc (d_2). Vậy $d_1 // d_2$.

Vậy chọn **(C)**

24. Thay x, y, z ở phương trình của d vào phương trình của (α) ta được:

$1 + t + 3(2 - t) + 2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Thay t = 2 vào phương trình d ta được $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -4 \end{cases}$. Vậy chọn **(D).**

25. Đường thẳng d đi qua M(0; 1; 2) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$

nên d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$; đường thẳng d còn đi qua

điểm M'(4; −1; 4) ứng với t = 2 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (-2; 1; -1)$ nên

phương trình tham số của d còn viết dưới dạng: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$.

Vậy chọn **(B).**

26. Đường thẳng AB đi qua A(2; 3; −1) và b(1; 2; 4) có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 5)$ nên đường thẳng AB có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-5}$$

Hoặc AB còn có phương trình là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. Vậy chọn **(D).**

27. Chọn **(C)**

28. Chọn **(D)**

29. Chọn **(D)**.

30. Hình chiếu vuông góc H của A lên d là giao điểm của $mp(\alpha)$ đi qua A vuông góc với d với đường thẳng (d)

$mp(\alpha)$ có phương trình: $-x - y + 2z + 3 = 0$

Từ đó tìm được giao điểm H của d và (α) là $H = (2; -3; 1)$. Vậy chon **(A)**

31. Khoảng cách giữa AC và BD được xác định theo công thức:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right]\right|} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vậy học sinh giải đúng. Vậy chọn **(A)**

32. Ta có: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 2.\cos\frac{\pi}{3} = 2.\frac{1}{2} = 1$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$(\vec{u} - \vec{v})\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}^2 = 1 - 1 = 0$$

Vậy $\vec{u} - \vec{v} \perp \vec{v}$. Vậy chọn **(D)**

33. $\|[\vec{u}, \vec{v}]\| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\vec{u}, \vec{v}) = 2.5.\sin\frac{\pi}{6} = 5$. Vậy chọn **(B)**.

34. Mặt phẳng $2x - 3y + z - 1 = 0$ cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại: $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \left(0; -\frac{1}{3}; 0\right)$; (0; 0; 1). Vậy chọn **(A)**

35. Trong 4 phương án đã cho $\vec{u}_1(5; -51; -39)$, $\vec{u}_2(10; -102; -78)$,

$\vec{u}_3(-5; 51; 39)$, $\vec{u}_4(5; 51; 39)$

Ta thấy $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ là ba vectơ cùng phương và không cùng phương với $\vec{u}_4$. Vậy $\vec{u}_4$ không phải là vectơ chỉ phương của d'. Vậy chọn **(D)**.

36. Học sinh giải đúng. Vậy chọn **(A)**.

37. Chọn **(D)**

38. Đường thẳng MM' là đường thẳng đi qua M(1; -1; 1) và nhận vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; -2; -3)$ làm vectơ chỉ phương nên MM' có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm H của MM' và mp(P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 - 3t \\ x - 2y - 3z + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } H(0;\ 1;\ 4)$$

Vì M và M' đối xứng qua mp (P) nên H là trung điểm của MM' suy ra:

$$\begin{cases} x_M + x_{M'} = 2x_H \\ y_M + y_{M'} = 2y_H \\ z_M + z_{M'} = 2z_H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = -1 \\ y_{M'} = 3 \\ z_{M'} = 7 \end{cases}. \text{ Vậy } M'(-1;\ 3;\ 7). \text{ Vậy chọn } \mathbf{(A)}$$

39. Đường thẳng (d) đi qua M(1; 2; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 0; -1)$ khoảng cách từ A(0; –1; 3) đến d được xác định như sau:

$$h = \ = d\left(\Delta, d\right) = \frac{\left\|\left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right]\right\|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{14}$$

Vậy chọn **(B)**

40. Tọa độ M_1, M_2, M_3 lần lượt là: $M_1(-1; 2; 3)$, $M_2(-1; -2; -3)$;, $M_3(1; 2; -3)$

Khi đó ta tìm được phương trình mp $(M_1M_2M_3)$ là:

$6x - 3y + 2z + 6 = 0$. Vậy chọn **(C)**

41. Mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$ có tâm là :

$I = (1; -3; 2)$, có bán kính là $R = 7$

Khoảng cách từ tâm I(1; -3; 2) đến mặt phẳng : $6x + 2y + 3z - 55 = 0$

là $d = \dfrac{|6 - 6 + 6 - 55|}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \dfrac{|-49|}{\sqrt{49}} = 7 = R$

Vậy mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng : $6x + 2y + 3z - 55 = 0$

Vậy chọn **(C)**

42. Chọn **(B)**.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' với cạnh bên không vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với các cạnh bên của hình lăng trụ và cắt chúng tại P, Q, R. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến tam giác PQR thành tam giác P'Q'R'

a) Chứng minh rằng thể tích V của hình lăng trụ đã cho bằng thể tích của hình lăng trụ PQR.P'Q'R'

b) Chứng minh rằng $V = S_{PQR}.AA'$, trong đó S_{PQR} là diện tích tam giác PQR

Giải

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến khối đa diện ABC.PQR thành khối đa diện A'B'C'.P'Q'R' nên $V_{ABC.PQR} = V_{A'B'C'.P'Q'R'}$, suy ra :

$V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R''}$

b) Vì $PP' \perp (PQR)$ nên $V_{PQR.P'Q'R'} = PP'.S_{PQR} = AA'.S_{PQR}$

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{PQR}$ (đpcm)

Bài 2. Cho tứ diện ABCD có thể tích V. Hãy tính thể tích của hình tứ diện có đỉnh là trọng tâm các mặt của tứ diện đã cho.

Giải

Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của 4 mặt của tứ diện.

Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD

Khi đó, theo tính chất của tứ diện thì G sẽ là tâm của phép vị tự biến tứ diện ABCD thành tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ với tỷ số vị tự $K = \frac{1}{3}$ nên

$$V_{G_1G_2G_3G_4} = \left(\frac{1}{3}\right)^3.V_{ABCD} = \frac{1}{27}.V$$

Bài 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có thể tích V. Hãy tính thể tích của tứ diện ACB'D'

Giải

Ta có: $V_{AA'B'D'} = V_{D.ACD'} = V_{B.ACB'} = V_{C'.D'B'A} = \frac{1}{6}V$

Mà $V = V_{AA'B'D'} + V_{D.ACD'} + V_{B.ACB'} + V_{C'D'B'C} + V_{ACB'D'}$

$\Leftrightarrow V = \frac{4}{6}V + V_{ACB'D'} \Leftrightarrow V_{ACB'D'} = \frac{1}{3}V$

Bài 4. Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình 8 mặt đều. Hãy so sánh thể tích của tứ diện đều đã cho và thể tích của hình 8 mặt đều đó.

Giải

Cho tứ diện đều ABCD, gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của 6 cạnh của tứ diện. Khi đó khối đa diện MNPQRS là một hình tám mặt.

Vì $MN = MR = NR = NP = NS = SP = QM = QS = MS = RP = QP = \frac{1}{2}$ a) với a là cạnh tứ diện nên MNPQRS là một hình tám mặt đều.

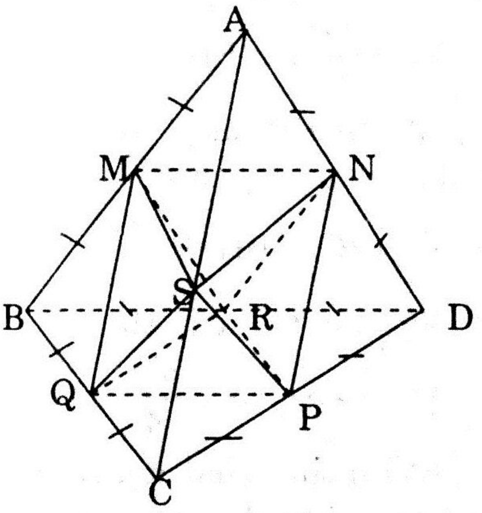
Ta có: $\frac{V_{AMNS}}{V_{ABCD}} = \frac{AM.AS.AN}{AB.AC.AD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Vậy $V_{AMNS} = \frac{1}{8}V$ (Với $V = V_{ABCD}$)

Tương tự $V_{BMQR} = V_{CQSP} = V_{DNPR} = \frac{1}{8}V$

Vậy ta có $V_{ABCD} = 4.\frac{1}{8}V + V_{MNPQRS}$

$\Leftrightarrow V = \frac{V}{2} + V_{MNPQRS} \Leftrightarrow V_{MNPQRS} = \frac{V}{2}$



Bài 5. Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi H là hình gồm các điểm của hình tròn (O; R) nhưng không nằm trong hình vuông. Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi hình H khi quay quanh một đường chéo của hình vuông.

Giải

Gọi V là thể tích hình tròn xoay sinh bởi H khi quay quanh đường chéo AC (hình vẽ). Khi đó $V = V_1 - V_2$

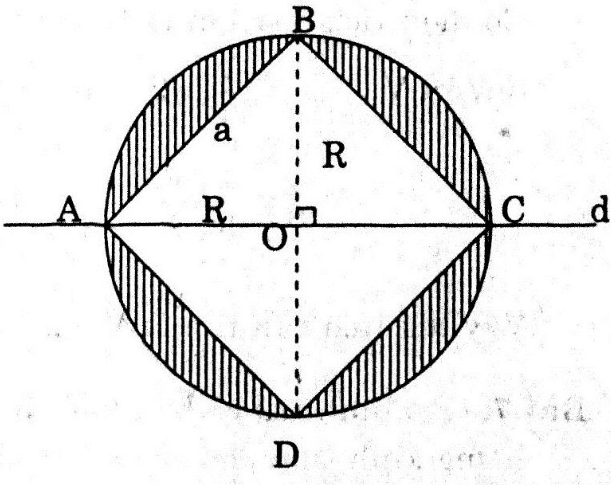
Trong đó V_1 là thể tích khối cầu tròn xoay tâm O, bán kính R

$\Rightarrow V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$

Còn V_2 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho tam giác ABC quay quanh AC

$\Rightarrow V_2 = 2.\frac{1}{3}.AO.\pi R^2 = \frac{2}{3}\pi R^3$

Suy ra $V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$



Bài 6. Cho lục giác đều ABCDEF cạnh a

a) Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi lục giác đó khi quay quanh đường thẳng AD.

b) Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi lục giác đó khi quay quanh đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Giải

a) Vì lục giác đều ABCDEF có trục đối xứng là AD, nên thể tích khối tròn xoay cần tìm là thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình thang cân ABCD quay quanh AD.

Khi ΔABH quay quanh AD ta được khối nón có thể tích là :

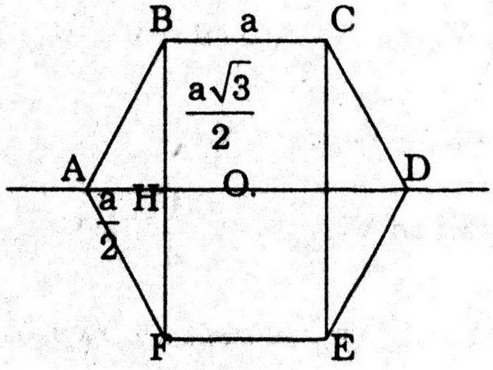
$V_1 = \frac{1}{3}AH.\pi.BH^2 = \frac{a^3\pi}{8}$

Khi BCKH quay quanh AD ta được khối trụ có thể tích là:

$V_2 = BC.\pi.BH^2 = \frac{3a^3\pi}{4}$

Vậy thể tích cần tìm là:

$V = 2V_1 + V_2 = \frac{a^3\pi}{4} + \frac{3a^3\pi}{4} = a^3\pi$



b) Do tính chất đối xứng nên thể tích cần tìm bằng 2 lần thể tích khối tròn xoay khi cho hình thang vuông AHOF quay quanh trục Δ (hình vẽ)

Khi cho AHQF quay quanh Δ ta sẽđược một khối nón cụt có đường cao

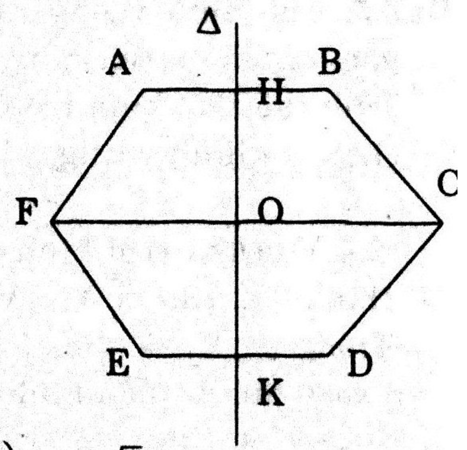
$h = HO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Có diện tích đáy bé là $B_1 = \pi.AH^2 = \frac{\pi a^2}{4}$

Có diện tích đáy lớn là $B_2 = \pi.FO^2 = \pi a^2$

Suy ra $V_{\text{nón cụt}} = \frac{1}{3}.h(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1B_2})$

$= \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi a^2}{4} + \pi a^2 + \sqrt{\frac{\pi a^2}{4}.\pi a^2}\right) = \frac{7\sqrt{3}\pi a^3}{24}$



Vậy thể tích cần tìm là $V = 2.V_{\text{nón cụt}} = \frac{7\sqrt{3}.\pi a^3}{12}$

Bài 7. Cho hình trụ có bán kính R và đường cao $R\sqrt{2}$. Gọi AB và CD là hai đường kính thay đổi của hai đường tròn đáy mà AB vuông góc với CD.

a) Chứng minh rằng ABCD là tứ diện đều.

b) Chứng minh rằng các đướng thẳng, AC, AD, BC, BD luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định (tức là khoảng cách từ các đường thẳng đó tới trục của mặt trụ bán kính mặt trụ)

Giải

a) Vì AB ⊥ CD nên ta chứng minh được ΔDBC cân tại B, suy ra BD = BC, tương tự ta có: AC = AD = BD = BC

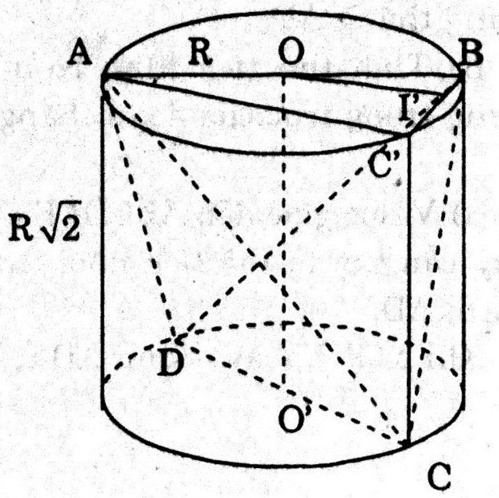
Trong tam giác vuông BO'C có

$BC^2 = O'B^2 + O'C^2$

Trong tam giác vuông O'OB có

$O'B^2 = O'O^2 + OB^2$

Vậy $BC^2 = O'O^2 + OB^2 + O'C^2$



$= (R\sqrt{2})^2 + R^2 + R^2 = 4R^2$

$\Rightarrow$ BC = 2R. Vậy tứ diện ABCD có 6 cạnh bằng nhau và bằng 2R nên nó là tứ diện đều. (đpcm)

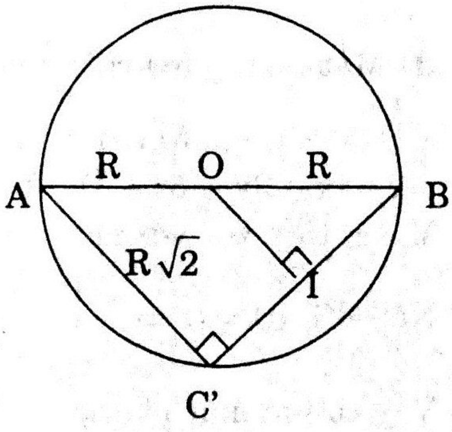
b) Kẻ đường sinh CC' của hình trụ

Ta có mp(C'BC) // OO'

Suy ra khoảng cách giữa OO' và BC bằng khoảng cách từ OO' đến mp(C;BC) và bằng OI (I là trung điểm BC")

Ta tính được OI = $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ (trong tam giác vuông AC'B cân tại C')

Tương tự, khoảng cách giữa các đường thẳng BD, AD, AC với đường thẳng OO' cũng bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, nên 4 đường thẳng AC, AD , BC, BD luôn tiếp xúc với mặt trụ có trục là đường thẳng OO' và có bán kính là $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.



Bài 8. Trong không gian tọa độ Oxyz cho các điểm A(1; 5; 3), B(4; 2; -5) C(5; 5; -1) và D(1; 2; 4)

a) Chứng tỏ rằng 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua A, B, C, D. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

c) Viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C và tìm khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng đó.

d) Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với CD và tiếp xúc với mặt cầu (S).

e) Tìm bán kính các đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng tọa độ.

Giải

a) Ta có $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD} = 72 \neq 0$ nên A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Giả sử mặt cầu (S) có phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Vì mặt cầu (S) đi qua A, B, C, D nên ta có hệ :

$$\begin{cases}(1-a)^2 + (5-b)^2 + (3-c)^2 = R^2\\(4-a)^2 + (2-b)^2 + (-5-c)^2 = R^2\\(5-a)^2 + (5-b)^2 + (-1-c)^2 = R^2\\(1-a)^2 + (2-b)^2 + (4-c)^2 = R^2\end{cases}$$. Giải hệ ta tìm được:

a = 1; b = 2 ; c = −1 ; R = 5

Vậy phương trình của (S) là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$

Tâm của (S) là $I=(1;2;-1)$, bán kính là $R=5$

c) Mặt phẳng (ABC(đi qua A(1; 5; 3) và nhận vectơ :

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(12;-20;12)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là:

$$12(x-1)-20(y-5)+12(z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x-5y+3z+13=0 \quad \Rightarrow d(D,(ABC))=\frac{5}{\sqrt{43}}$$

d) Mặt phẳng (α) vuông góc với CD là mặt phẳng có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD}=(-4;-3;5)$ nên có phương trình dạng:

$$-4x-3y+5z+D=0$$

Vì (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; −1) và R = 5

Nên $d(I,\alpha)=R\Leftrightarrow \dfrac{|-4-6-5+D|}{\sqrt{16+9+25}}=5\Leftrightarrow D=15\ \pm 25\sqrt{2}$

Vậy có hai mặt phẳng (α) là: $-4x-3y+5z+15-25\sqrt{2}=0$

và $-4x-3y+5z+15+25\sqrt{2}=0$

e) Bán kính của đường tròn giao tuyến của mp(P) với mặt cầu (S) là:

$r=\sqrt{R^2-h^2}$, trong đó R là bán kính của (S), h = d(I(P))

- Nếu mp(P) là mp(Oxy) thì $h=1\Rightarrow r_1=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$
- Nếu mp(P) là mp(Oyz) thì $h=1\Rightarrow r_2=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$
- Nếu mp(P) là mp(Oxz) thì $h=2\Rightarrow r_3=\sqrt{21}$

Bài 9. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{3}$

a) Viết phương trình hình chiếu của Δ trên các mặt phẳng tọa độ.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng: $x+5y+z+4=0$ đi qua Δ

c) Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và các trục tọa độ.

d) Viết phương trình đường vuông góc chung của Δ và đường thẳng Δ': $x=y=z$

e) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả Δ và Δ'

Giải

a) Mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mp(Oxy) có phương trình là:

$$x+2y+1=0$$

Vậy hình chiếu vuông góc của Δ lên mp(Oxy) có phương trình là:

$$\begin{cases}x+2y+1=0\\ z=0\end{cases}$$

Tương tự , hình chiếu vuông góc của Δ lên mp (Oyz) và (Oxz) có phương trình là: $\begin{cases} 3y + z + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 3x - 2z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

b) Δ đi qua M_o (1; –1; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ = (2; -1; 3)

mặt phẳng : x + 5y + z + 4 = 0 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ = (1; 5; 1)

ta thấy: $\begin{cases} M_o \in mp \\ \vec{u}.\vec{n} = 0 \end{cases}$ suy ra Δ nằm trên mp: x + 5y + z + 4 = 0

Cách khác: ta thấy tọa độ 2 điểm M_0(1; -1; 0) và M_1(3; -2; 3) thỏa mãn phương trình mp: x + 5y + z + 4 = 0 nên Δ thuộc mặt phẳng đã cho.

c) Khoảng cách giữa Δ và trục Ox được xác định như sau:

$$d(\Delta, Ox) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{i}\right].\overrightarrow{OM_o}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{i}\right]\right|}$$

trong đó $\vec{u}$ = (2; –1; 3) là vectơ chỉ phương của Δ

$\vec{i}$ = (1; 0; 0) là vectơ chỉ phương của Ox.

M_o (1; -1; 0) ∈ Δ, O(0; 0; 0) là gốc tọa độ.

Ta có $[\vec{u}, \vec{i}]$ = (0; 3; 1) , $\overrightarrow{OM_o}$ = (1; -1; 0)

Suy ra $d(\Delta, Ox) = \frac{|-3|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Tương tự $d(\Delta, Oy) = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; $d(\Delta, Oz) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

d) Đường thẳng Δ đi qua M_o(1; -1; 0) có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ = (2; -1; 3)

Δ' đi qua M_o' (0; 0; 0) có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$ = (1; 1; 1)

Mặt phẳng (P) chứa Δ và đường vuông góc chung của Δ và Δ' có phương trình là: 3x + 9y + z + 6 = 0

Mặt phẳng (Q) chứa Δ' và đường vuông góc chung của Δ và Δ' có phương trình là: –2x + 7y – 5z = 0

Suy ra đường vuông góc chung của Δ và Δ' có phương trình tổng quát là:

$$\begin{cases} 3x + 9y + z + 6 = 0 \\ -2x + 7y - 5z = 0 \end{cases}$$

e) Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (α) và (β); trong đó

(α) là mặt phẳng chứa Δ và (α) song song với Oz, (β) là mặt phẳng chứa Δ' và (β) song song với Oz.

Phương trình của (α) là: $x + 2y + 1 = 0$

Phương trình của (β) là: $x - y = 0$

Suy ra phương trình đường thẳng cần tìm là : $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Bài 10. Trong không gian tọa độ Oxyz cho hai điểm A(1; -1; 2), B(2; 0; 1)

a) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 2$

b) Tìm quỹ tích các điểm N sao cho $NA^2 + NB^2 = 3$.

c) Tìm quỹ tích các điểm cách đều hai mặt phẳng (OAB) và (Oxy)

Giải

a) Giả sử M(x; y; z) là điểm thỏa mãn $MA^2 - MB^2 = 2$ (*)

Khi đó , (*) $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - (x-2)^2 - y^2 - (z-1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z - 1 = 0$ (α). Vậy quỹ tích M là mặt phẳng (α)

b) Gọi N(x; y; z) là điểm thỏa mãn $NA^2 + NB^2 = 3$ (**)

Khi đó, (**) $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 + (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Vậy quỹ tích điểm N là mặt cầu có tâm $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

và có bán kính $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi điểm P(x; y; z) là điểm cách đều hai mặt phẳng : (OAB) và (Oxy), khi đó ta có: d(P(OAB)) = d(P, (Oxy)) (***)

Mặt phẳng (OAB) có phương trình là: $-x + 3y + 2z = 0$

Vậy (***) $\Leftrightarrow \dfrac{|-x + 3y + 2z|}{\sqrt{14}} = |z| \Leftrightarrow -x + 3y + 2z = \pm\sqrt{14}.z$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -x + 3y + (2 - \sqrt{14})z = 0 & (1) \\ -x + 3y + (2 + \sqrt{14})z = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Vậy quỹ tích các điểm P thỏa mãn bài toán là hai mặt phẳng lần lượt là (1) và (2).

Bài 11. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình

$\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 5 + ct \end{cases}$ trong đó a, b, c thay đổi sao cho $c^2 = a^2 + b^2$

a) Chứng minh đường thẳng Δ đi qua một điểm cố định, góc giữa Δ và Oz là không đổi.

b) Tìm quỹ tích giao điểm của Δ và mp(Oxy)

Giải

a) Giả sử đường thẳng Δ đi qua điểm cố định $(x_o; y_o; z_o)$ ta có:

$$\begin{cases} x_o = 1 + at \\ y_o = 1 + bt \\ z_o = 5 + ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o - 1 = at \\ y_o - 1 = bt \\ z_o - 5 = ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_o - 1)^2 = a^2t^2 \\ (y_o - 1)^2 = b^2t^2 \\ (z_o - 5)^2 = c^2t^2 \end{cases}$$

Theo bài ra $a^2 + b^2 = c^2$

Suy ra: $(x_o - 1)^2 + (y_o - 1)^2 = a^2t^2 + b^2t^2 = (a^2 + b^2)t^2 = c^2t^2 = (z_o - 5)^2$

Do đó $\begin{cases} (x_o - 1)^2 = 0 \\ (y_o - 1)^2 = 0 \\ (z_o - 1)^2 = 0 \end{cases}$. Vậy đường thẳng Δ luôn đi qua điểm (1; 1; 5) cố định.

Ta có: $\vec{u}_\Delta = (a; b; c)$, $\vec{u}_{O_z} = (0; 0; 1)$. Do $a^2 + b^2 = c^2$

Vậy $\cos(\widehat{\Delta, Oz}) = |\cos(\vec{u}_\Delta, \vec{u}_{O_z})| = \left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \left|\dfrac{c}{\sqrt{2c^2}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow (\widehat{\Delta, Oz}) = 45^\circ$

Vậy góc giữa Δ và Oz luôn bằng 45° không đổi.

b) Gọi M(x; y; O) là giao điểm của Δ và mp(Oxy)

Ta có: $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ O = 5 + ct \end{cases}$ với $a^2 + b^2 = c^2$.

Suy ra $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = a^2t^2 + b^2t^2 = (a^2 + b^2)t^2 = c^2t^2 = 5^2$

Vậy quỹ tích M là đường tròn I(1; 1; 0) bán kính bằng 5 trong mp(Oxy)

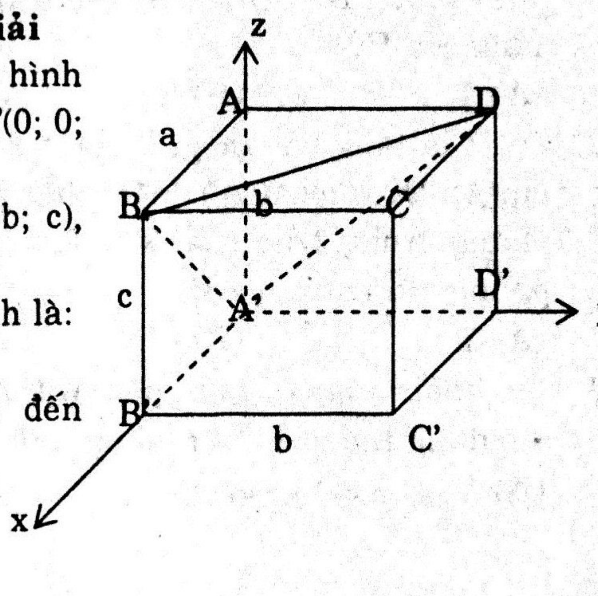
Bài 12. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' với: AB = a, BC = b, CC' = c

a) *Tính khoảng cách từ điểm A tới mp(A'BD)*

b) *Tính khoảng cách từ điểm A' tới đường thẳng C'D.*

c) *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.*

Giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz gắn vào hình hộp chữ nhật ABCD.A"B'C'D' sao cho A'(0; 0; 0), A(0; 0; c), D'(0; b; 0), B'(a; 0; 0)

Suy ra: B((a; 0; c), D(0; b; c), C(a; b; c), C'(a; b; 0)

a) mặt phẳng (A'BD) có phương trình là:

$bcx + acy - abz = 0$

nên khoảng cách từ A(0; 0 ; c) đến mp(A'BD) là:

$$d(A, (A'BD) = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$$

b) Khoảng cách từ A' đến đường thẳng C'D được xác định như sau:

$$d(A', C'D) = \frac{\left\| \left[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'D} \right] \right\|}{\left| \overrightarrow{C'D} \right|}$$

Ta có $\overrightarrow{A'C'} = (a; b; 0)$, $\overrightarrow{C'D'} = (-a; 0; c) \Rightarrow [\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'D}] = (bc; -ac; ba)$

Vậy $d(A', C'D) = \dfrac{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + b^2a^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' được xác định như sau:

$$d(BC', CD') = \frac{\left| \left[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'} \right] . \overrightarrow{BC} \right|}{\left\| \left[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'} \right] \right\|}$$

Ta có $\overrightarrow{BC'} = (0; b; -c)$, $\overrightarrow{CD'} = (-a; 0; -c)$, $\overrightarrow{BC} = (0; b; 0)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'}] = (-bc; ca; ab)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'}]. \overrightarrow{BC} = abc$

Vậy $d(BC', CD') = \dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$

I. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

. Cho H là hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Xét các mặt phẳng (SAC), (SAB), (SBD), (ABC), (SOI), trong đó I là trung điểm của AB, O là tâm hình vuông ABCD. Trong các mặt phẳng đó, có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng của H?

(A) 1; **(B)** 2 ; **(C)** 3 ; **(D)** 4.

. Gọi H là lăng trụ lục giác đều ABCDEF.A'B'C'D'E'F'. Xét các mặt phẳng : mp(AA'D), mp(ACA') mặt phẳng trung trực của DD', mp(ABB') , mặt phẳng trung trực của AB. Trong các mặt phẳng đó có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng của H?

(A) 1 ; **(B)** 2 ; **(C)** 3 ; **(D)** 4.

. Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C', M là trung điểm cạnh AB. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

(A) $V_{A'B'C'C} = V_{MA'B'C'}$; **(B)** $V_{ABCC'} = V_{A'BCC'}$;

(C) $V_{MA'B'C'} = V_{A'ABC}$; **(D)** $V_{MA'B'C'} = \frac{1}{2}V_{AA'B'C'}$.

4. Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

(A) $V_{A'BCC'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$; **(B)** $V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$;

(C) $V_{A'.BCC'B'} = 2V_{AA'BC}$; **(D)** $V_{C.ABB'A'} = V_{C'.ABB'A'}$.

5. Cho khối chóp tứ giác S.ABCD và các điểm A', B', C', D' lần lượt nằm trên các đường thẳng SA, SB, SC, SD nhưng không trùng với S.

Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

(A) $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$;

(B) $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SC}{SC'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SD}{SD'}$;

(C) $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'}.\frac{SD}{SD'}$;

(D) $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SD}{SD'}$

6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu nếu đáy là đa giác nội tiếp;

(B) Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu nếu tất cả các mặt đều là đa giác nội tiếp;

(C) Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu nếu có mặt bên vuông góc với mặt đáy;

(D) Đa diện nội tiếp được một mặt cầu nếu các mặt đều là đa giác nội tiếp.

7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Đường tròn đi qua ba điểm phân biệt nằm trên mặt cầu thì nằm hoàn toàn trên mặt cầu;

(B) Có duy nhất một mặt cầu đi qua 4 đỉnh của một hình thang cân cho trước.

(C) Hình chóp có đáy là hình thang vuông luôn luôn nội tiếp một mặt cầu;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

8. Cho khối trụ có bán kính $a\sqrt{3}$ và chiều cao $2a\sqrt{3}$. Trong các số sau đây, số nào là thể tích của nó?

(A) $4\pi a^3\sqrt{2}$; **(B)** $9a^3\sqrt{3}$; **(C)** $6\pi a^3\sqrt{3}$; **(D)** $6\pi a^2\sqrt{3}$.

9. Đáy hình chóp là hình vuông diện tích bằng 4. Các mặt bên là những tam giác đều. Diện tích toàn phần của hình chóp là:

(A) $4 + 4\sqrt{3}$; **(B)** 8 ; **(C)** 16 ; **(D)** $4 + 4\sqrt{2}$

0. Một hình nón có đường sinh bằng l và bằng đường kính đáy. Trong các số sau đây, số nào là bán kính hình cầu nội tiếp hình nón?

(A) $\frac{1}{3}l$; **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{6}l$; **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{6}l$; **(D)** $\frac{3}{4}l$

1. Một hình cầu có thể tích $\frac{4\pi}{3}$ nội tiếp một hình lập phương. Thể tích của hình lập phương đó bằng :

(A) 8 ; **(B)** 4π; **(C)** 1 ; **(D)** $2\pi\sqrt{3}$

2. Cho hình chữ nhật có tọa độ hai đỉnh A(–2; 3; 0), B(2; 3; 0) và một cạnh nằm trên trục Ox. Khối tròn xoay sinh bởi hình chữ nhật đó khi quay quanh trục Oy có thể tích là:

(A) $6\pi^2$; **(B)** 12; **(C)** 12π ; **(D)** $\frac{4\pi}{3}$.

3. Cho vectơ $\vec{u}(1; 0; 2)$ và $\vec{v}(0; -1; 1)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào cùng phương với $[\vec{u}, \vec{v}]$

(A) $\vec{a}(1; 1; 1)$; **(B)** $\vec{b}(-2 ; 1; 1)$;

(C) $\vec{c}(0; 1; -1)$; **(D)** $\vec{d}(2; 2; -1)$.

4. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 6 nằm trong mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y + z + 5 = 0$. Thể tích hình chóp S.ABC với S = (1; 1; 1) bằng:

(A) $3\sqrt{6}$; **(B)** $12\sqrt{2}$; **(C)** 8 ; **(D)** 4.

5. Mặt cầu có tâm I (6; 3; –4) tiếp xúc với trục Ox có bán kính là:

(A) 5 ; **(B)** $2\sqrt{3}$; **(C)** $4\sqrt{3}$; **(D)** 4.

6. Cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Phương trình tham số nào sau đây cũng là phương trình của d?

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$; **(B)** $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$; **(D)** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$

7. Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$. Khi đó:

(A) d cắt d' ; **(B)** d trùng d' ;

(C) d và d' chéo nhau ; **(D)** d song song với d'.

18. Cho mặt phẳng (P): $3x + 4z + 12 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$. Khi đó:

(A) mp(P) đi qua tâm mặt cầu (S) ;

(B) mp(P) tiếp xúc với mặt cầu (S) ;

(C) mp(P) cắt (S) theo một đường tròn ;

(D) mp(P) không cắt (S).

19. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M(2; 0; 1) trên đường thẳng:

$$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ là:}$$

(A) (1; 0; 2) **(B)** (2; 2; 3) ; **(C)** (0; –2; 1); **(D)** (–1; 4; 0)

20. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và d': $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$. Khoảng cách giữa d và d' là:

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; **(B)** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$; **(C)** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; **(D)** $\sqrt{2}$

21. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -5 + t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - 2t' \\ z = 5 + 3t' \end{cases}$. Phương trình đường vuông góc chung của d và d' là:

(A) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$; **(B)** d : $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$;

(C) $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{2}$; **(D)** $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{2}$

22. Cho mặt phẳng (P) : $mx + y + (n - 2)z + m + 2 = 0$. Với mọi m, n mặt phẳng (P) đi qua điểm cố định:

(A) (1; 2; 0); **(B)** (2; 1; 0); **(C)** (0; 1; -2) ; **(D)** (–1; –2; 0)

23. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại điểm A(3; 4; 3) có phương trình là:

(A) $4x + 4y - 2z - 17 = 0$; **(B)** $2x + 2y + z - 17 = 0$;

(C) $2x + 4y + z - 17 = 0$; **(D)** $x + y + z - 17 = 0$.

*** Đáp án**

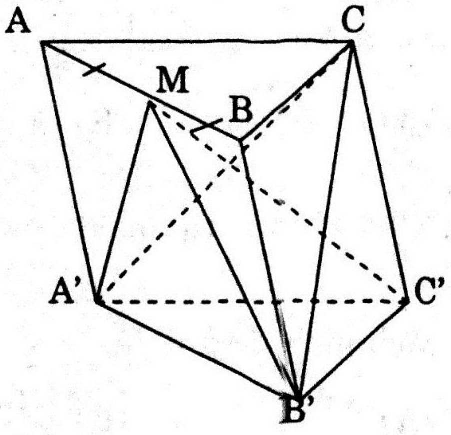
Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	**(C)**	**(C)**	**(D)**	**(B)**	**(A)**	**(B)**	**(A)**	**(C)**	**(A)**	**(B)**

Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	(A)	(C)	(B)	(D)	(A)	(B)	(D)	(D)	(A)	(A)

Câu	21	22	23
Đáp án	(D)	(D)	(B)

*** Hướng dẫn giải.**

1. Dựa vào tính chất của tứ giác đều thì H có ba mặt phẳng đối xứng là (SAC), (SBD), (SOI). Chọn **(C)**



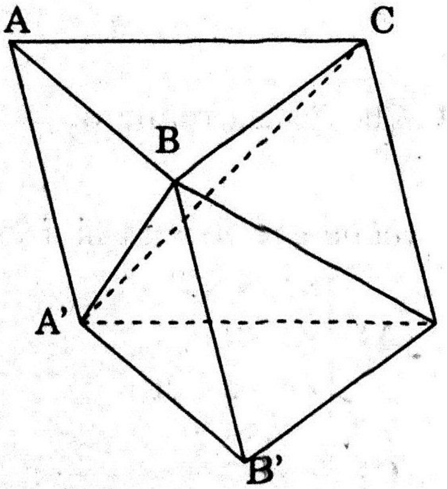
2. Dựa vào tính chất của lăng trụ lục giác đều thì các mặt phẳng : (AA'D); mặt phẳng trung trực của DD'; mặt phẳng trung trực của AB là các mặt phẳng đối xứng của H. Chọn **(C)**

3. Gọi h là độ dài đường cao của lăng trụ, và S là diện tích tam giác ABC. Ta có: d(C, (A'B'C')) = d(M, (A'B'C')) = h

   Nên $V_{A'.B'C'C} = V_{M.A'B'C'} = V_{A'ABC} = \frac{1}{3}hS$

   Do AA' // (BCC') $\Rightarrow V_{ABCC'} = V_{A''BCC'} = \frac{1}{3}hS$

   Vậy (A) và (B), (C) là đẳng thức đúng; (D) sai. Chọn **(D)**



4. Gọi h là độ dài đương cao của lăng trụ S là diện tích ΔABC

   Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = h.S$

   $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}h.S$; $V_{B.A'B'C'} = \frac{1}{3}h.S$

   Suy ra $V_{A'.BCC'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'ABC} - V_{B.A'B'C'}$

   $$= hS - \frac{1}{3}hS - \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \quad (1)$$

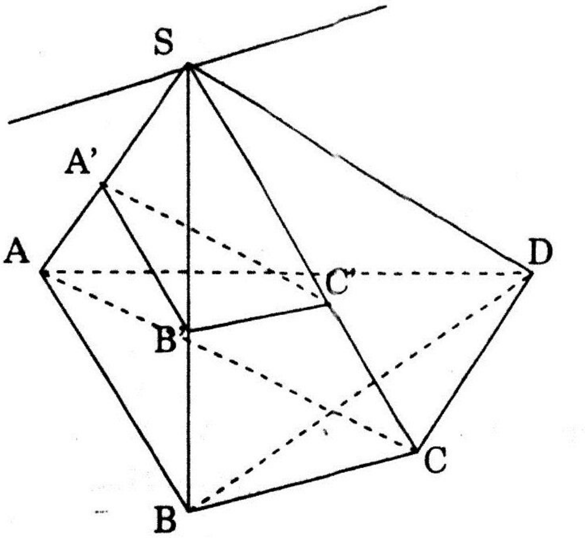
   Và $V_{A'.BCC'B'} = V_{B.A'B'C'} + V_{A'BCC'} = \frac{1}{3}hS + \frac{1}{3}hS = \frac{2}{3}hS = 2.V_{A'.ABC}$ (2)

   Do CC' // mp(ABB'A') $\Rightarrow V_{C.ABB'A'} = V_{C'ABB'A'}$ (3)

   Từ (1) (2) và (3) suy ra: (A), (C), (D) là đẳng thức đúng. (B) sai. Chọn **(B)**

5. Mệnh đề (A) $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$ luôn đúng.

   Chọn **(A)**.



6. Chỉ có mệnh đề **(B)** "Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu nếu tất cả các mặt cầu đều là đa giác nội tiếp" là mệnh đề đúng. Các mệnh đề còn lại không đúng (chúng ta chứng minh bằng cách đưa ra 1 phản ví dụ). Chọn **(B)**.

7. Chỉ có mệnh đề **(A)** "Đường tròn đi qua 3 điểm phân biệt nằm trên mặt cầu thì nằm hoàn toàn trên mặt cầu" là mệnh đề đúng. Chọn **(A)**

8. Thể tích khối trụ là : $V = h\pi R^2 = 2a\sqrt{3}\,\pi.(a\sqrt{3})^2 = 6\pi a^3\sqrt{3}$. Vậy chọn **(C)**.

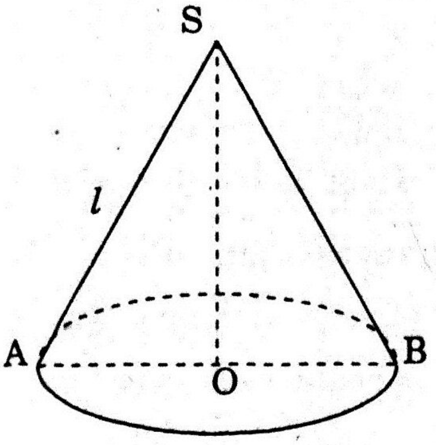
9. Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều đã cho là

$S = 4.$ diện tích mặt bên + diện tích đáy.

Trong đó diện tích đáy bằng 4 $\Rightarrow$ cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng 2 suy ra diện tích một mặt bên là: $\sqrt{3}$

Vậy $S = 4\sqrt{3} + 4$. Vậy chọn **(A)**

10. Bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón chính là bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều có cạnh l. Ta tính được $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}l$. Vậy chọn **(B)**.



11. Vì thể tích mặt cầu là: $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi}{3} \Rightarrow R = 1$

Suy ra cạnh của hình lập phương là $a = 2R = 2$

Suy ra thể tích lập phương là: $V = 2^3 = 8$. Vậy chọn **(A)**

12. Chọn **(C)**.

13. Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = (2; -1; -1)$

Vậy $[\vec{u}, \vec{v}]$ cùng phương với $\vec{b}(-2; 1; 1)$. Vậy chọn **(B)**

14. Thể tích của hình chóp S.ABC là: $V = \dfrac{1}{3}h.dt_{\Delta ABC}$

trong đó h = d(S, (ABC)) – d(S, (α)) = $\dfrac{|2-2+1+5|}{\sqrt{4+4+1}} = 2$

$dt_{\Delta ABC} = 6$ nên $V = \dfrac{1}{3}.2.6 = 4$. Vậy chọn **(D)**.

15. Bán kính mặt cầu là $R = d(I, Ox) = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Vậy chọn **(A)**.

16. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và d đi qua các điểm M có tọa độ dạng $M = (1 + 2t; 2 - t; 3 + t)$, ∀t

với t = 1 ta có $M = (3; 1; 4) \in d$. Vậy ta chọn **(B)**.

17. Đường thẳng d đi qua M(1; 2; 3) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -1)$

d' đi qua M'(1; –1; 2) có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,' = (2; 2; -2)$

Ta thấy $\vec{u}, \vec{u}\,'$ cùng phương nhưng không cùng phương với vectơ $\overrightarrow{MM'} = (0; -3; -1)$ nên d và d' song song với nhau. Vậy chọn **(D)**

18. Mặt cầu (S) có tâm I (0; 0; 2) có bán kính R = 1

Ta có $d(I, (P)) = \dfrac{|4+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{16}{5} > R$

Vậy (P) không có điểm chung với (S). Ta chọn **(D)**.

19. Hình chiếu vuông góc của điểm M(2; 0; 1) trên đường thẳng Δ:

$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ là giao điểm của mặt phẳng (α) đi qua M và (α) ⊥ Δ

mp(α) có phương trình: $x + 2y + z - 3 = 0$

Từ đó ta tìm được giao điểm của Δ với (α) là H(1; 0; 2). Vậy chọn **(A)**.

20. Đường thẳng d đi qua M(1; –1; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; -1; 0)$

d' đi qua M'(2; -2; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,'(-1; 2; 1)$

Khoảng cách giữa d và d' là:

$$h = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u}\,'\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u}\,'\right]\right|} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$ Vậy chọn **(B)**

21. Đường vuông góc chung của d : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -5 + t \end{cases}$ và d' : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - 2t' \\ z = 5 + 3t' \end{cases}$

là đường thẳng Δ: $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{2}$. Vậy chọn **(D)**.

22. Gọi $M_0(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định của mp(P)

Khi đó: $mx_0 + y_0 + (n - 2)z_0 + m + 2 = 0$ đúng với $\forall m,n$

$$\Leftrightarrow \quad m(x_0 + 1) + nz_0 + y_0 - 2z_0 + 2 = 0 \text{ đúng với } \forall m, n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ z_0 = 0 \\ y_0 - 2z_0 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ z_0 = 0 \\ y_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow M_0(-1; 0; -2)$$

Vậy chọn **(D)**.

23. Mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ có tâm là I(1; 2; 2) và có bán kính R = 3. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với S tại A(3; 4; 3).

Khi $A \in (\alpha)$ và $d(I, \alpha) = R = 3$

Ta thấy mp: $2x + 2y + z - 17 = 0$ thỏa mãn hai điều kiện trên, Vậy chọn **(B)**.

III. MỘT SỐ ĐỀ TỰ LUẬN.

Đề I

Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$

a) Tính thể tích của hình chóp đã cho.

b) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

c) Gọi A' và C' lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và SC. Chứng minh rằng hình chóp A'.ABCD và C'.CBAD bằng nhau.

Câu 2. Trong không gian tọa độ Oxyz cho các điểm A(4; -1; 2), B(1; 2; 2), C(1; -1; 5)

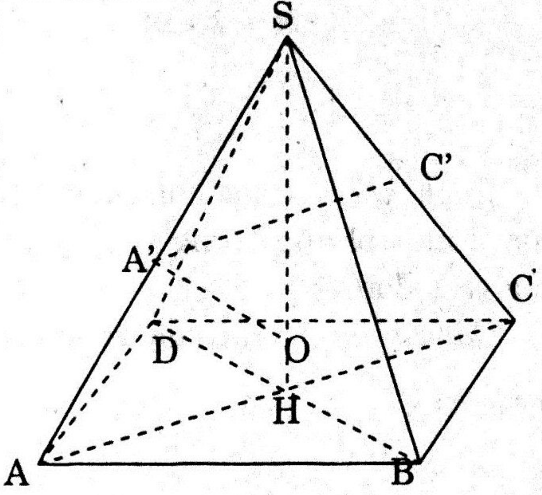
a) Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

b) Viết phương trình mp(ABC). Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mp(ABC) và các mặt phẳng tọa độ.

c) Viết phương trình trục của đường tròn ngoại tiếp Δ ABC

d) Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là tứ diện đều.

Giải



Câu 1.

a) Gọi H là tâm của hình vuông ABCD

Ta có SH $\perp$ (ABCD)

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{6}}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

b) Gọi O là giao điểm của SH và đường trung trực cạnh SA, suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABCD.

Ta có: SO.SH = SA'.SA (A' là trung điểm SA)

$$\Rightarrow R = SO = \frac{SA'.SA}{SH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

c) Ta thấy hai hình chóp A'.ABCD và C'.ABCD đối xứng với nhau qua mp(SBD) nên chúng bằng nhau. (đpcm)

Câu 2.

a) ta có $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$ nên tam giác ABC là tam giác đều.

b) mp(ABC) là mặt phẳng đi qua A(4; -1; 2) và nhận $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (9; 9; 9)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là: $x + y + z - 5 = 0$

Mặt phẳng (ABC) cắt trục tọa độ lần lượt tại:
M(5; 0; 0), N(0; 5; 0), P(0; 0; 5)

Thể tích khối chóp OMNP là : $V = \frac{1}{6}.5.5.5 = \frac{125}{6}$

c) Trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và vuông góc với mp(ABC). Tâm đường tròn ngoại tiếp là điểm M thỏa mãn MA = MB = MC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MB^2 = MC^2 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy trục của đường tròn là đường thẳng đi qua M(2; 0; 3) và nhận vectơ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (9; 9; 9)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 9t \\ z = 3 + 9t \end{cases}$$

Cách khác : trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là giao tuyến của 2 mặt phẳng trung trực của cạnh AB và AC. Từ đó suy ra phương trình của trục đường tròn.

Cách khác : Trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là tập hợp các điểm M(x; y; z) trong không gian sao cho $MA = MB = MC \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MB^2 = MC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 - (z-2)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 6y + 12 = 0 \\ -6y + 6z - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Đây chính là phương trình của trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

d) Để ABCD là tứ diện đều thì D nằm trên trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $DA = AB = 3\sqrt{2}$

Vì D nằm trên trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên tạo độ của D có dạng: $D = (2 + t; t; 3 + t)$

Vì $DA = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow DA^2 = 18 \Leftrightarrow (2 - t)^2 + (1 + t)^2 + (1 + t)^2 = 18$

$\Leftrightarrow 3t^2 = 12 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$

Với $t = 2 \Rightarrow D = (4; 2; 5)$; Với $t = -2 \Rightarrow D = (0; -2; 1)$

Vậy có hai điểm D thỏa mãn bài toán.

Đề II

Câu 1. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi B', C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, AD.

a) Chứng minh rằng 6 điểm B, C, D, B', C', D' nằm trên một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu đó.

b) Tính thể tích khối chóp D.BCC'B'

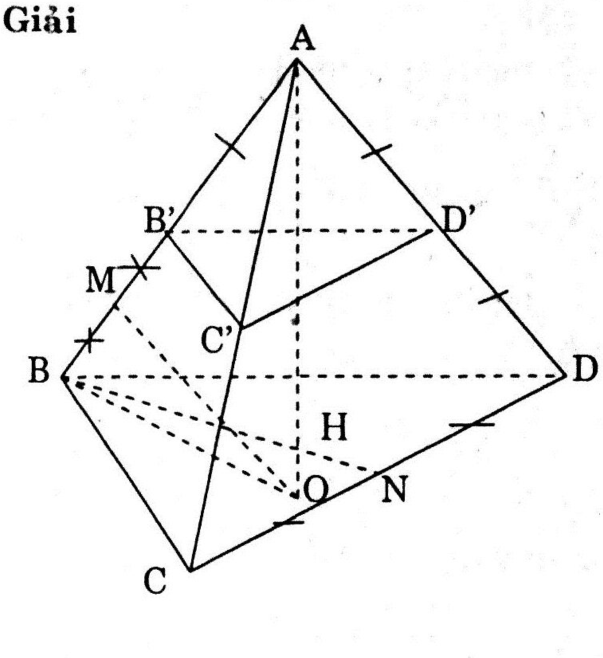
Câu 2. Trong không gian tọa độ Oxyz cho các điểm A(2; 0; 0), A'(6; 0; 0), B(0; 3; 0), B'(0; 4; 0), C(0; 0; 4), C'(0; 0; 3)

a) Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, A', B, C. Chứng minh rằng: B' và C' cũng nằm trên mặt cầu đó.

b) Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC, trọng tâm G của $\Delta A'B'C'$ cùng nằm trên một đường thẳng đi qua O. Viết phương trình đường thẳng đó.

c) Tính khoảng cách từ điểm O tới giao tuyến của mp(ABC') và (A'B'C)

Giải



Câu 1. Gọi H là tâm của ΔBCD, khi đó $AH \perp (BCD)$ và AH là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và AH cũng là trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta B'C'D'$

a) Gọi M là trung điểm BB' và O là giao điểm của đường thẳng AH với đường trung trực OM của cạnh BB'

Khi đó ta có: $\begin{cases} OB = OC = OD \\ OB' = OC' = OD' \\ OB = OB' \end{cases}$

$\Rightarrow$ O cách đều 6 điểm B, C,D, B', C', D' hay O là tâm mặt cầu đi qua B, C, D, B', C', D'. Bán kính mặt cầu là R = OB

Ta có: $OB^2 = OM^2 + BM^2 = (OA^2 - AM^2) + BM^2 = OA^2 - \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2$

Mặt khác tam giác vuông AMO đồng dạng tam giác vuông AHB

$$\Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AO}{AB} \Rightarrow AO = \frac{AM.AB}{AH} = \frac{3a\sqrt{6}}{8}$$

Vậy $OB^2 = \left(\frac{3a\sqrt{6}}{8}\right)^2 - \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{11a^2}{32} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{11}}{4\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{22}}{8}$

Vậy $R = \frac{a\sqrt{22}}{8}$

b) Tính $V_{D.BCC'B'}$. Khoảng cách từ D đến mp (ABC) cũng bằng đoạn AH (vì tứ diện ABCD đều)

Diện tích hình thang cân B'C'CB là $S = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + a\right).\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

Vậy thể tích khối chóp D.BCC'B' là:

$$V_{D.BCC'B'} = \frac{1}{3}.AH.S = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^3\sqrt{2}}{16}$$

Câu 2. a) Gọi phương trình mặt cầu đi qua A, A', B, C là:

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

Vì mặt cầu đi qua A(2; 0; 0), A'(6; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 4) nên ta có hệ: $\begin{cases} 4 + 2a + d = 0 \\ 36 + 6a + d = 0 \\ 9 + 3b + d = 0 \\ 16 + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -7 \\ c = -7 \\ d = 12 \end{cases}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 7y - 7z + 12 = 0$

Thay tọa độ điểm B' và C' và phương trình mặt cầu ta thấy thỏa mãn (đpcm)

b) Trực tâm H của ΔABC là $H = \left(\frac{72}{61}; \frac{48}{61}; \frac{36}{61}\right)$

Trọng tâm G của $\Delta A'B'C'$ là $G = \left(2; \frac{4}{3}; 1\right)$

Suy ra phương trình đường thẳng HG là : $\begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}$

Đường thẳng này đi qua O(0; 0; 0). Vậy H, G, O thẳng hàng.

c) Phương trình mp(ABC') là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 3x+2y+2z-6=0$

Phương trình mp(A'B'C) là : $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 2x+3y+3z-12=0$

Phương trình giao tuyến Δ của (ABC') và (A'B'C) là:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z-6=0 \\ 2x+3y+3z-12=0 \end{cases}$$

Δ đi qua $M_o\left(-\frac{6}{5};\frac{24}{5};0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(0;-5;5)$

Khoảng cách từ O đến Δ là $d(O,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OM_o},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{648}}{5\sqrt{2}}=\frac{18}{5}$

Đề III

Câu 1. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi N là điểm nằm trên cạnh AB, và (α) là mặt phẳng đi qua ba điểm D, N, B'.

a) mp(α) cắt hình hộp đã cho thiết diện là hình gì?

b) Chứng minh rằng mặt phẳng (α) phần chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện H_1 và H_2 bằng nhau.

c) Tính tỉ số thể tích của khối đa diện H_1 và thể tích tứ diện AA'BD

Câu 2. Trong không gian tọa độ Oxyz cho các điểm :

A(1; –3; –1), và B(–2; 1; 3)

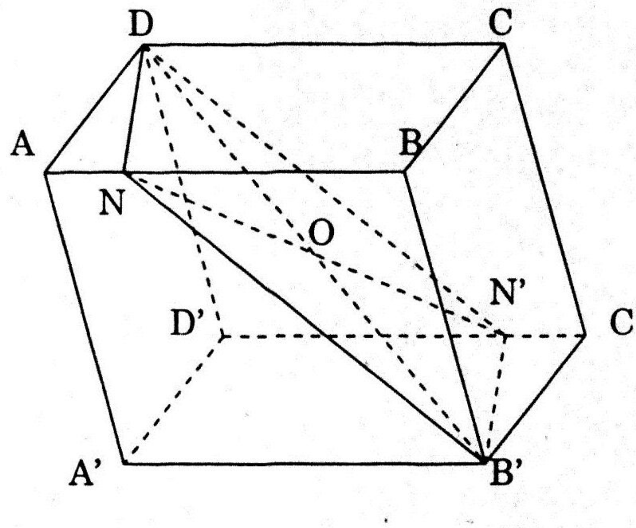
a) Chứng tỏ rằng hai điểm A và B cách đều trục Ox.

b) Tìm điểm C nằm trên trục Oz sao cho tam giác ABC vuông tại C.

c) Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng AB trên mp(Oyz)

d) Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm O, A, B và có tâm nằm trên mp(Oxy)

Giải



a) Vì một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song theo hai giao tuyến song song nên (α) cắt hình hộp theo thiết diện là hình bình hành DNB'N'.

b) H_1 và H_2 là hai hình đa diện đối xứng với nhau qua tâm O của hình hộp nên chúng bằng nhau.

c) Vì H_1 và H_2 bằng nhau nên thể tích của chúng bằng một nữa thể tích nh hộp.

Mặt khác, $V_{AA'BD} = \frac{1}{6}V_{hộp}$. Vậy $V_{H_1} = 3V_{AA'BD}$

u 2. a) Ta có $d(A, Ox) = d(B, Ox) = \sqrt{10}$ (đpcm)

b) Gọi $C(0; 0; c) \in Oz$ là điểm cần tìm

Vì ΔABC vuông tại C nên $CA^2 + CB^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow 1 + 9 + (1 + c)^2 + 4 + 1 + (3 - c)^2 = 9 + 16 + 16$

$\Leftrightarrow 2c^2 - 4c - 16 = 0 \Leftrightarrow c = 4$ và $c = -2$

Vậy có 2 điểm C thỏa mãn bài toán là : $C = (0; 0; 4)$ và $C' = (0; 0; -2)$

c) Hình chiếu của $A(1; -3; -1)$ lên mp(Oyz) là $A'(0; -3; -1)$

Hình chiếu của $B(-2; 1; 3)$ lên mp(Oyz) là $B'(0; 1; 2)$

Vậy A'B' chính là hình chiếu của AB lên mp(Oyz). Phương trình đường ẳng A'B' là $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 4t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

d) Gọi $I(a; b; 0) \in (Oxy)$ là tâm của mặt cầu đi qua O, A, B

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} IO^2 = IA^2 \\ IA^2 = IB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b+3)^2 + 1 \\ (a-1)^2 + (b+3)^2 + 1 = (a+2)^2 + (b-1)^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{53}{10} \\ b = -\dfrac{18}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $\left(x + \frac{53}{10}\right)^2 + \left(y + \frac{18}{5}\right)^2 + z^2 = \frac{4105}{100}$

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Chương I. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

§1. Khái niệm về khối đa diện 5
§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện 8
§3. Phép vị tự, các khối đa diện đều và sự đồng dạng của các khối đa diện đều 15
§4. Thể tích của khối đa diện 20
Ôn tập chương I 27

Chương II. MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

§1. Mặt cầu 44
§2. Khái niệm về mặt tròn xoay 50
§3. Mặt trụ, hình trụ và khối trụ 50
§4. Mặt nón, hình nón và khối nón 48
Ôn tập chương II 57

Chương III.PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. Hệ tọa độ trong không gian 69
§2. Phương trình mặt phẳng 81
§3. Phương trình đường thẳng 88
Ôn tập chương III 101
Ôn tập cuối năm 131

GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 12
(Chương trình nâng cao)
Nguyễn Văn Lộc (Chủ biên)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896: (04) 39724770; Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Chịu trách nhiệm nội dung

Biên tập: THANH HOA
Trình bày bìa: QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY SÁCH - THIẾT BỊ GIÁO DỤC ĐỨC TRÍ

Mã số: 1L - 94 ĐH2009
In 3.000 cuốn, khổ 16 x 24cm tại Trung tâm Mỹ thuật ứng dụng
Số xuất bản: 345-2009/CXB/04-54/ĐHQGHN, ngày 24/04/2009
Quyết định xuất bản số: 94 LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu Quý II năm 2009.